Madagascar juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

1. Déterminer, par la méthode algébrique, les nombres complexes z, tels que

$$z^2 = 21 + 20\text{i},$$

   i étant le nombre complexe tel que $\text{i}^2 = -1$.
2. À l'aide de la table de logarithmes, déterminer le module et l'argument (à 1 minute près par défaut) du nombre complexe

$$z = 21 + 20\text{i}.$$

   En déduire les modules (à $\dfrac{1}{100}$ près par défaut) et arguments des nombres complexes z déterminés dans la question 1.

EXERCICE 2

On considère la rotation R_1 de centre O_1 et d'angle $+\dfrac{\pi}{4}$ et la rotation R_2 de centre O_2 et d'angle $+\dfrac{3\pi}{4}$

1. Montrer que $R_2 \circ R_1$ (composition de la rotation R_1 par la rotation R_2 dans cet ordre) est une symétrie par rapport à un point J.
2. Déterminer le point J.

EXERCICE 3

Dans tout le problème on se place dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Montrer que la courbe (Γ_1) d'équation

$$(x-2)^2 - 4y^2 = 0$$

   est formée de deux droites concourantes, dont on précisera les coordonnées du point d'intersection.
2. Quelle est la nature de la courbe (Γ_2) d'équation

$$4x^2 - (y-3)^2 = 0?$$

Partie B

Dans cette partie, les questions peuvent être traitées *dans un ordre quelconque*.
On se propose d'étudier les coniques d'équation

$$p\left[(x-2)^2 - 4y^2\right] + q\left[4x^2 - (y-3)^2\right] = 0$$

(p et q étant des nombres réels), dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées (résultat à admettre).

1. Quelles sont les courbes correspondant à $p = 0$ ou $q = 0$?
   Dans la suite du problème, on suppose $p \neq 0$ et l'on pose $\dfrac{p}{q} = k$.
   On désigne par (C_k) la courbe d'équation

$$(1) \qquad (x-2)^2 - 4y^2 + k\left[4x^2 - (y-3)^2\right] = 0,$$

   k étant un nombre réel.
2. Montrer que les courbes (C_k) passent par quatre points fixes, indépendants de k, dont on déterminera les coordonnées.
3. Déterminer k_1 pour que la courbe (C_k) soit un cercle.
   Quelles sont les coordonnées du centre de ce cercle ? Quel est le carré de son rayon ?
4. Montrer qu'il existe deux valeurs, k_2 et k_3, du paramètre k pour lesquelles les courbes correspondantes sont des paraboles.
   Donner les équations de ces paraboles et préciser la direction de leur axe respectif.

Partie C

Dans cette partie, les candidats qui ne parviendraient pas à établir l'équation (3) peuvent admettre le résultat donné et traiter les trois questions suivantes.
Dans cette partie, on suppose k différent de $0, k_2$ et k_3.
L'équation (1) peut s'écrire

$$(2) \qquad ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0,$$

où a, b, c, d, e sont des fonctions du paramètre k.

1. Mettre les polynômes $ax^2 + bx, cy^2 + dy$ sous forme réduite (ou canonique). On pourra par exemple poser

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0$$

   et déterminer x_0 et y_0 en fonction de k pour que les polynômes en X et Y obtenus ne renferment plus de terme du premier degré en X et Y.
   En déduire qu'il existe, dans la famille (C_k), une troisième courbe constituée par deux droites, obtenue pour une valeur k_4 de k.
   L'équation de la courbe (C_k) n'est pas demandée.
2. En supposant en plus $k \neq k_4$, montrer que l'équation des courbes (C_k) peut alors s'écrire, dans un repère à préciser,

$$(3) \qquad \frac{X^2}{\dfrac{4k(32k-7)}{(1+4k)^2(4+k)}} + \frac{Y^2}{\dfrac{4k(7-32k)}{(1+4k)(4+k)^2}} - 1 = 0.$$

3. Étudier les signes des expressions suivantes :

$$U(k) = \frac{4k(32k-7)}{(1+4k)^2(4+k)} \quad \text{et} \quad V(k) = \frac{4k(7-32k)}{(1+4k)(4+k)^2}$$

   En déduire la nature des coniques (C_k), suivant les valeurs de k.
4. Trouver l'équation de l'ensemble, (E), des centres des coniques à centre de la famille (C_k).
   [On ne demande pas de tracer la courbe (E).]
5. Déterminer le carré de la demi distance focale $\left(c^2\right)$ lorsque $-4 < k < -\dfrac{1}{4}$ et étudier les variations du carré de l'excentricité des coniques correspondantes.