Baccalauréat Mathématiques Madagascar septembre 1955

I.
1$^{\text{er}}$ sujet

Établir les formules permettant de transformer en produits les expressions

$$\sin p+\sin q,\quad \cos p+\cos q,\quad \text{tg}\, p+\text{tg}\, q.$$

I.
2$^{\text{e}}$ sujet

Dérivée de $y=\sin x$, x étant exprimé en radians.
On établira préalablement la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque $x\to 0$.

I.
3$^{\text{e}}$ sujet

Résoudre un triangle, connaissant les trois côtés.

II.

On donne un triangle ABC. Un point variable M décrit la droite BC.
Soit (O) le cercle de centre O passant par M et tangent en B à la droite AB.
Soit (O$'$) le cercle de centre O$'$ passant par M et tangent en C à la droite AC. Soit P le second point commun aux cercles (O) et (O$'$).

1. **a.** Évaluer les angles formés par les droites PB, PC, PM, prises deux à deux.
   b. Lieu géométrique de P quand M décrit la droite BC ?
   c. Démontrer que PM passe par un point fixe, que l'on situera avec précision par rapport aux points A, B, C.
2. M étant fixé, on considère l'inversion de pôle M et de puissance $k=\overline{\text{MB}}\cdot\overline{\text{MC}}$.
   a. Quelle est la transformée du cercle (O) dans cette inversion ? Sous quel angle cette transformée coupe-t-elle BC ?
   Même question pour (O$'$).
   b. En déduire une nouvelle preuve du **1.**,
   c. puis la solution du **1. b.**.
3. **a.** Quels sont les lieux des centres O et O$'$ quand M décrit la droite BC ?
   Évaluer l'angle des droites ωO, ωO$'$, ω étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ; en déduire que le cercle passant par les trois points ω, O, O' passe par un point fixe autre que ω.
   b. Par quelle transformation ponctuelle simple passe- t-on de tout point O au point O$'$ correspondant ?
4. Enveloppes des perpendiculaires en P et en M à la droite PM quand M décrit la droite BC ?
   Enveloppe de la droite OO$'$?

N. B. - Les questions **1.** et **2.** sont indépendantes.