Baccalauréat Madagascar septembre 1954
Série mathématiques

I

1er sujet

Résolution de l'équation

$$a\cos x + b\sin x = c$$

(une seule méthode).

2e sujet

Dérivée de $y = \sin x$, x étant exprimé en radians.

3e sujet

Résoudre un triangle ABC, connaissant b, c, A.

II

1. On considère une conique à centre, (Γ), de foyers F et F′ $(\text{FF}' = 2c)$ et les tangentes (T) et (T′) aux sommets A et A′ de l'axe focal $(\text{AA}' = 2a)$.
   Soit M un point quelconque de (T). On mène par M la seconde tangente, MM′, à (Γ), qui coupe (T′) en M′.
   Démontrer que le produit $\overline{\text{AM}} \cdot \overline{\text{A}'\text{M}'}$ reste constant lorsque M décrit (T).
   Déterminer cette valeur constante.
   Démontrer que le cercle de diamètre MM′ passe par F et F′.
2. Réciproquement, étant données deux droites parallèles (T) et (T′) et une de leurs perpendiculaires communes AA′ $(\text{AA}' = 2a)$, deux points M et M′ décrivant respectivement (T) et (T′) de manière que $\overline{\text{AM}} \cdot \overline{\text{A}'\text{M}'} = k$, k étant une constante' algébrique.
   Quelle est l'enveloppe de MM′ ?
   Discuter l'existence et la nature de cette enveloppe suivant la valeur de k.
3. Soient O le centre de la conique (Γ) considérée à la première question et MM′ une tangente variable à (Γ), qui coupe en M et M′ les tangentes (T) et (T′) aux sommets A et A′ de l'axe focal. On abaisse de M′ la perpendiculaire M′P sur OM.
   Démontrer que lorsque MM′ enveloppe (Γ), P décrit un cercle (C), dans lequel on désignera par I le point diamétralement opposé à O.
4. Démontrer que l'axe radical du cercle (C) et du cercle de diamètre MM′ passe par A′.
   En déduire que, si F et F′sont les foyers de la conique (Γ), la division (A′IFF′) est harmonique et que, par suite, les cercles de diamètre MM′ et A′I sont orthogonaux
   Retrouver cette dernière propriété en faisant une inversion de pôle A′.
5. Sur un axe Ox, on marque les points A et A′ tels que $\overline{\text{OA}} = -\overline{\text{OA}'} = a$ et l'on trace les perpendiculaires At et A′t' à Ox qu'on oriente dans le même sens ;

$$\left(\overrightarrow{\text{A}x}, \overrightarrow{\text{A}t}\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

   Soit M un point de l'axe At tel que $\overline{\text{AM}} = m$ (m positif).
   On mène une droite MM′ faisant avec Ox un angle φ $\left[\left(\overrightarrow{\text{O}x}, \text{MM}'\right) = \varphi\right]$, qui coupe A′$t'$ en M′.

Écrire l'équation de la droite MM$'$ dans le système d'axes Ox, Oy $\left[\left(\overrightarrow{\text{O}x}\,,\,\overrightarrow{\text{O}y}\right) = +\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Déterminer la conique (Γ) d'axe focal porté par Ox, tangente aux droites At, A$'t'$, MM$'$, en calculant les abscisses de ses foyers F et F$'$ en fonction de m et φ.

Calculer l'excentricité de cette conique et en déduire la relation qui doit exister entre m et φ pour qu'elle soit un cercle.

Si l'on appelle θ l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,,\,\overrightarrow{\text{OM}}\right)$, cette relation se traduit par une autre relation simple entre φ et 2θ.

Vérifier géométriquement ce dernier résultat.

Toujours dans le cas où la conique (Γ) est un cercle, étudier la variation de $y = \text{tg}\varphi$ en fonction de m et construire la courbe représentative.