Baccalauréat Madagascar septembre 1967

SÉRIE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES ET MATHÉMATIQUES ET TECHNIQUE

Exercice 1

Le nombre x étant un entier relatif, déterminer les valeurs de x pour lesquelles on a

$$x \equiv 2 \pmod{5} \text{ (}x\text{ congru à 2 modulo 5).}$$

x et y étant deux entiers relatifs tels que

$$-3 \leqslant x \leqslant 2 \quad \text{et} \quad -3 \leqslant y \leqslant 2,$$

déterminer les couples ordonnés $(x\,;\,y)$ tels que

$$x \equiv y + 2 \pmod{5}.$$

Exercice 2

On considère la transformation ponctuelle T qui à $M(x\,;\,y)$ fait correspondre le point $M'\left(x'\,;\,y'\right)$ tel que

$$x' = x + y + 1, \quad y' = -x + y - 1.$$

1. Quelle est la transformation réciproque de T ? Y a-t-il un point double pour T ?
2. On donne la droite D d'équation $y = mx + p$; montrer que sa transformée, D', par T est une droite, dont on déterminera l'équation.
3. I étant le point double de la transformation T, comparer IM et IM' et calculer $\left(\overrightarrow{\mathrm{I}M}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{I}M'}\right)$.
   Quelle est la transformation étudiée ?

Exercice 3

On donne le nombre complexe

$$z = -6\sqrt{3}(1 + \mathrm{i}).$$

1. Calculer le module et l'argument de ce nombre.
2. Donner, sous forme trigonométrique, puis sous forme cartésienne, les racines cubiques de ce nombre.

Exercice 4

1. On considère les fonctions f et g qui, à x, font correspondre

$$\begin{aligned} y &= f(x) = \sqrt{-\frac{1}{2}x^2 + x + 4} \quad \text{et} \\ y &= g(x) = -\sqrt{-\frac{1}{2}x^2 + x + 4}. \end{aligned}$$

Étudier les variations de la fonction f. Tracer son graphe par rapport à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$ (unité : 1 cm). En déduire le graphe de la fonction g, que l'on tracera sur le même graphique.

La réunion des deux graphes obtenus est une conique, E, dont on déterminera les éléments suivants : excentricité, e, foyers, F et F$'$, centre, O$'$, sommets, directrices, D et D$'$.

2. Soit δ la droite variable d'équation

$$2mx - 2y - 10m + 3\sqrt{2} = 0.$$

Utiliser le graphe E et l'ensemble des positions de δ pour résoudre l'équation

$$2\sqrt{-\frac{1}{2}x^2 + x + 4} = 2mx - 10m + 3\sqrt{2}.$$

3. Soit F le foyer de E d'abscisse positive, D la directrice de E associée à F et H la projection orthogonale de F sur D. On envisage une droite d, de pente p, passant par O$'$, et une parallèle, d', à d, qui rencontre E en M et M' et l'axe $x'\mathrm{O}x$ en un point, P, d'abscisse $1 + \ell$.

U désignant le milieu de MM', quel est l'ensemble, Δ, des points U lorsque d' se déplace parallèlement à d ? (Solution algébrique et solution géométrique.)

d et Δ rencontrent D en I et J ; démontrer la relation

$$\overline{\mathrm{HI}}\,.\,\overline{\mathrm{HJ}} = -\overline{\mathrm{HO}'}\,.\,\overline{\mathrm{HF}}.$$

(Solution algébrique et solution géométrique.) ,

4. Chaque point M de E est maintenant repéré par

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{F}x}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{F}M}\right) = \alpha \quad \text{et} \quad \mathrm{F}M = \rho.$$

La droite FM rencontre D en K et recoupe E en N.

Démontrer que :

a. la somme $\dfrac{1}{\mathrm{F}M} + \dfrac{1}{\mathrm{F}N}$ est constante quand M décrit E ;

b. $\dfrac{1}{\overline{\mathrm{F}M}} + \dfrac{1}{\overline{\mathrm{F}N}} = \dfrac{2}{\overline{\mathrm{F}K}}$.

Démontrer que les cercles de diamètres MN et FK sont orthogonaux.

Quels sont les transformés de ces cercles dans l'inversion de pôle F et de puissance FH^2 ?

C' désignant l'inverse du cercle C de diamètre MN, déterminer le centre, S, et le rayon, R', de C'.

Quel est l'ensemble des points S quand M décrit E ?