Exercice 1. Plus fort !

Dans cet exercice, toutes les questions et sous-questions sont, dans une large mesure, indépendantes. Certaines montent crescendo en difficulté. Toutes les réponses devront être argumentées.

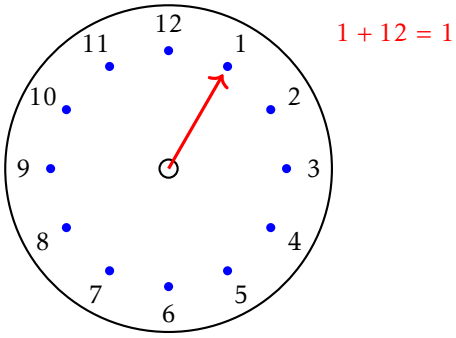
Q1 : *Une montre atypique.*

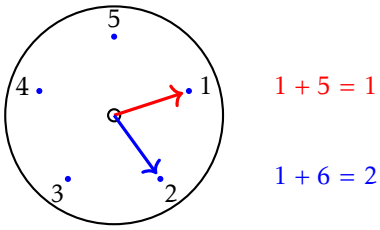
Quand on regarde une montre du commerce et que la petite aiguille ajoute 12 (heures) à la position graduée sur 1 (heure), elle revient sur la position 1 (heure), comme dans le croquis ci-contre. En quelque sorte, $1 + 12 = 1$.

Plutôt que de diviser la journée en 12 heures, on décide arbitrairement de la diviser en n heures avec $n \geqslant 2$.

(a) On choisit $n = 5$, croquis ci-contre. Justifier qu'en suivant le mouvement de la petite aiguille, on a $1 + 6 = 2$. À quoi s'identifierait $1 + 12$?

(b) Comment choisir n de sorte que, cette fois, $1 + 12 = 2$? Dessiner une horloge correspondante.





Q2 : *Traduction.*

Exprimer ce que signifient les phrases suivantes (lues pratiquement telles quelles dans des médias !) :

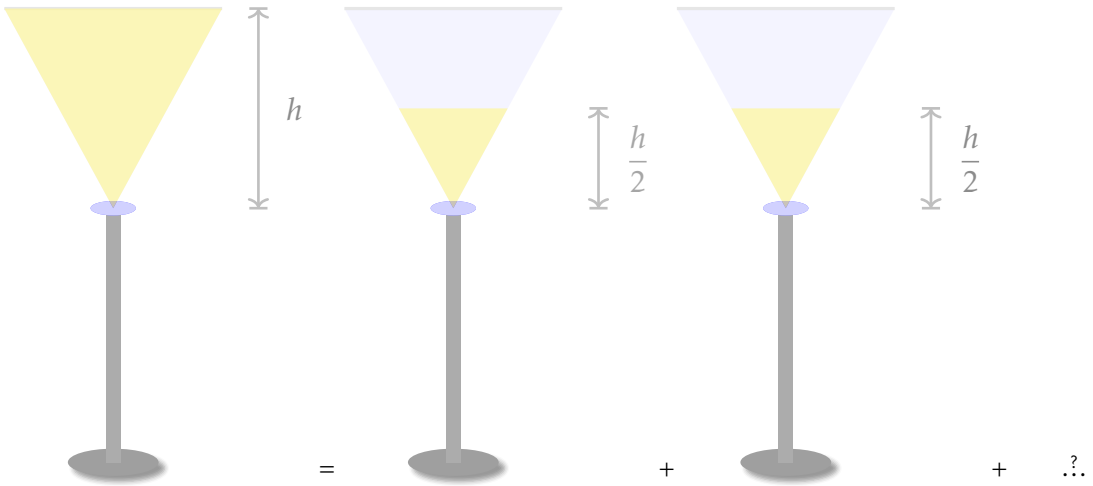
(a) « Il est indéniable que Beethoven n'aurait pas été le grand compositeur qu'il a été s'il n'avait pas été sourd » en utilisant le moins de négations possible.

(b) « La mairie rejette la demande d'annulation déposée par l'association Organisons le premier Championnat de vitesse d'escargots I de l'arrêté municipal interdisant leur ramassage » en la remplaçant par deux ou trois phrases plus simples et plus claires montrant que vous l'avez bien comprise.

Q3 : *Celle qui fait des mathématiques, c'est celle qui ne boit pas.*

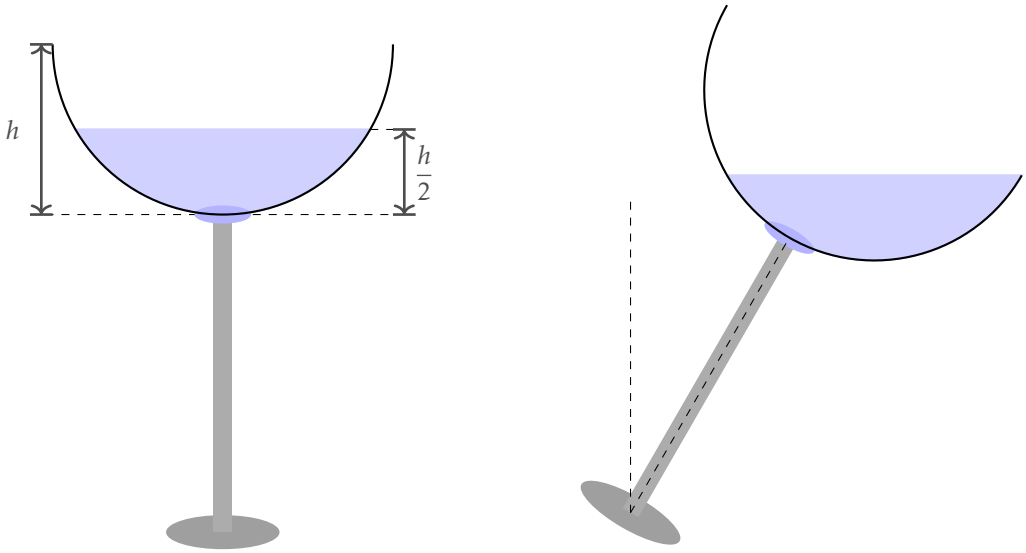
Une coupe de champagne conique est remplie à ras bord. Mais la personne à qui la coupe est destinée n'en veut pas. Elle la vide dans d'autres coupes initialement vides et identiques, en les remplissant chacune jusqu'à la moitié de leur hauteur h.

Combien de coupes remplit-elle ainsi ?



Q4 : *Ou alors juste un peu.*

Un verre est formé par une demi-sphère (représentée en coupe par un demi-cercle sur le dessin). Le verre est rempli jusqu'à la moitié de sa hauteur h. Quel est l'angle d'inclinaison maximum x selon lequel on peut pencher ce verre sans renverser de liquide ?



Q5 : *Mais les mathématiciens ont le droit de manger.*

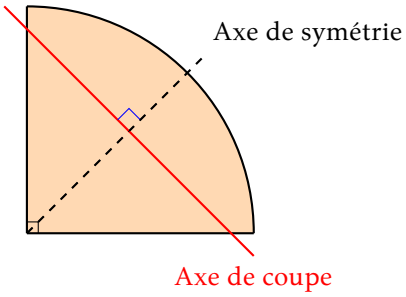
Un groupe d'une centaine de personnes réserve un dîner dans un restaurant niçois avec vue sur mer. En temps normal, le prix du repas est de 40 euros par personne. Mais le gérant exige que sa recette (c'est-à-dire le total de ce que le groupe payera) atteigne au minimum 4 000 euros, ceci afin de couvrir les risques qu'il prend en leur réservant les tables si trop de convives se désistent.

(a) Justifier que, si $n \geqslant 100$ personnes viennent, elles payeront bien 40 euros chacune, mais que si, du fait de défections, seulement $n < 100$ personnes viennent, elles payeront alors davantage chacune. Combien paye chacun lorsque seulement 90 personnes viennent ?

(b) Le groupe obtient une subvention de 1 000 euros de l'État. Combien paye chacun lorsque seulement 90 personnes viennent ? Lorsque 120 personnes viennent ? Combien de personnes doivent venir, exactement, pour que le prix que chacun paye soit minimal ?

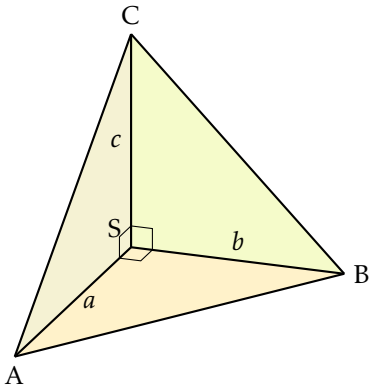
Q6 : *Et de prendre un dessert.*

Soit une portion de tarte représentée par le secteur angulaire ayant la forme d'un quart de disque (l'ouverture angulaire vaut $\frac{\pi}{2}$). On souhaite la diviser en deux parties égales. Mais d'une manière originale : en la coupant non pas le long de son axe de symétrie, mais le long d'une perpendiculaire à cet axe, dessin ci-contre. Ainsi, l'aire du morceau de gauche serait égale à l'aire du morceau de droite. Où faut-il couper ? (On introduira toutes les variables nécessaires à la résolution de ce problème.)



Q7 : *Pythagore 3D (théorème de de Gua).*

Montrer que, dans un tétraèdre trirectangle (trois angles droits en un sommet), c'est-à-dire un coin de parallélépipède rectangle, le carré de l'aire de la face oblique est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces.



Exercice 2. Recherche d'équilibre : les nombres sur le fil

On rappelle que pour tout entier naturel non nul m :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

et, de façon plus générale, que pour tout entier naturel n et tout entier naturel non nul b :

$$(n+1) + (n+2) + (n+3) + \cdots + (n+b) = \frac{b(2n+b+1)}{2}$$

Lorsque n est un entier au moins égal à 2, on dit que n est un *nombre équilibré* si on peut trouver un entier naturel non nul b tel que :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+b)$$

Dans ce cas, l'entier b est unique et s'appelle la *balance* de l'entier n.
Par exemple, 35 est un nombre équilibré, car :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 34 = 595$$

et

$$(35+1) + (35+2) + \cdots + (35+14) = 595$$

La balance de 35 est égale à 14.

1. Quelques exemples

Q1 : Montrer que 6 est un nombre équilibré et préciser sa balance.
Q2 : Montrer que 7 n'est pas un nombre équilibré.
Q3 : Montrer que 204 est un nombre équilibré de balance 84.

2. Lien entre nombres équilibrés et carrés parfaits

On rappelle qu'un entier naturel c est un carré parfait s'il existe un entier e tel que $c = e^2$. Ainsi, $16 = 4^2$ et $36 = 6^2$ en sont, mais pas 17 ni 18. Soit n un entier au moins égal à 2.

Q1 : On suppose dans cette question que n est un nombre équilibré ; on note b sa balance.
Montrer que $n^2 - n = 2bn + b^2 + b$ puis que $b = \dfrac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2}$.
En déduire que $8n^2 + 1$ est un carré parfait.

Q2 : On suppose dans cette question que $8n^2 + 1$ est un carré parfait ; on note e l'entier $\sqrt{8n^2+1}$.
Montrer que e est impair puis que le réel b défini par $b = \dfrac{-(2n+1) + e}{2}$ est un entier strictement positif.

Q3 : Conclure que n est un nombre équilibré si et seulement si $8n^2 + 1$ est un carré parfait.

3. Une fonction génératrice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x + \sqrt{8x^2+1}$$

Q1 : Vérifier que pour tout réel x, on a : $8(f(x))^2 + 1 = (8x + 3\sqrt{8x^2+1})^2$

Q2 : En déduire que si n est un nombre équilibré, alors $f(n)$ l'est aussi.
On pose $u_1 = 6$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$, $u_{k+1} = f(u_k)$.

Q3 : Montrer que $(u_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite strictement croissante de nombres équilibrés.

Q4 : Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, $u_{k-1} = 3u_k - \sqrt{8u_k^2+1}$.
On considère les fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = 3x - \sqrt{8x^2+1} \quad \text{et} \quad h(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{8x+1}$$

Q5 : Montrer que la fonction h est strictement croissante et en déduire que g l'est aussi.
On souhaite montrer que tout nombre équilibré est de la forme u_k pour un certain entier $k \geqslant 1$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe au moins un nombre équilibré qui n'est pas de cette forme. On note alors n le plus petit d'entre eux.

Q6 : Calculer u_2. En admettant que les seuls nombres équilibrés strictement inférieurs à 36 sont 6 et 35 (ce qu'il serait toujours possible de tester « à la main »), en déduire que $n > u_2$ puis qu'il existe un entier $m \geqslant 2$ tel que $u_m < n < u_{m+1}$. Conclure.

4. Tester en langage Python si un nombre est équilibré ou non

Q1 : Établir que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a : $u_{k+1} = 6u_k - u_{k-1}$

Q2 : On considère la fonction `mystere` suivante, qui prend pour argument un entier `n` au moins égal à 2.

```
def mystere(n):
    s=1
    i=2
    while i<n:
        s=s+i
        i=i+1
    return s
```

Expliquer ce que calcule mystere(n).

Q3 : Écrire une fonction `équilibre(n)` prenant en argument un entier n au moins égal à 2 et renvoyant `True` s'il s'agit d'un nombre équilibré et `False` sinon (on pourra utiliser au choix la question 4.a ou la question 4.b. en expliquant toutefois quelle méthode est vraisemblablement la plus rapide pour l'ordinateur).

5. Générer en langage Python des nombres équilibrés

Écrire une fonction `liste_équilibres` prenant en argument un entier `n` au moins égal à 2 et renvoyant la liste des entiers équilibrés strictement inférieurs à `n`. On rappelle que `[ ]` est la liste vide et que, étant donnés une liste `L` et un entier `i`, la commande `L.append(i)` ajoute l'élément `i` à la liste `L` en le plaçant à la fin.

Exercice 3. Recherche d'équilibre : les nombres sur le fil

Q1 : Une formule bien utile pour la suite.

En additionnant la somme S = 1 + 2 + 3 à elle-même, mais prise en ordre inverse, soit S = 3 + 2 + 1, et en posant l'opération comme suit,

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 \\ & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline = & 4 & + & 4 & + & 4 \end{array}$$

on calcule S + S = 3 × 4 et donc S = 6.

Plus généralement, prouver de cette manière que pour tout entier naturel non nul m :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

Q2 : En déduire que, pour tout entier naturel n et tout entier naturel non nul b :

$$(n+1) + (n+2) + (n+3) + \cdots + (n+b) = \frac{b(2n+b+1)}{2}$$

Lorsque n est un entier au moins égal à 2, on dit que n est un *nombre équilibré* si on peut trouver un entier b naturel non nul tel que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+b)$$

Dans ce cas, l'entier b est unique et s'appelle la *balance* de l'entier n.

Par exemple, 35 est un nombre équilibré, car :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 34 = 595$$

et

$$(35+1) + (35+2) + \cdots + (35+14) = 595$$

La balance de 35 est égale à 14.

Q3 : Quelques exemples

(a) Montrer que 6 est un nombre équilibré et préciser sa balance.

(b) Montrer que 7 n'est pas un nombre équilibré.

(c) Montrer que 204 est un nombre équilibré de balance 84.

Q4 : Lien entre nombres équilibrés et carrés parfaits. On rappelle qu'un entier naturel c est un carré parfait s'il existe un entier e tel que $c = e^2$. Ainsi, $16 = 4^2$ et $36 = 6^2$ en sont, mais pas 17 ni 18. Soit n un entier au moins égal à 2.

(a) On suppose dans cette question que n est un nombre équilibré ; on note b sa balance.
Montrer que $n^2 - n = 2bn + b^2 + b$ puis que $8n^2 + 1 = (2n + 2b + 1)^2$.

(b) On suppose dans cette question que $8n^2 + 1$ est un carré parfait ; on note e l'entier $\sqrt{8n^2+1}$.
Montrer que e est impair puis que le réel b défini par $b = \dfrac{-(2n+1)+e}{2}$ est un entier strictement positif.

(c) Conclure que n est un nombre équilibré si et seulement si $8n^2 + 1$ est un carré parfait.

Q5 : Une fonction génératrice. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x + \sqrt{8x^2+1}$$

(a) Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$8(f(x))^2 + 1 = (8x + 3\sqrt{8x^2+1})^2$$

(b) En déduire que si n est un nombre équilibré, alors $f(n)$ l'est aussi.
On pose $u_1 = 6$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$, $u_{k+1} = f(u_k)$.

(c) Montrer que $(u_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite strictement croissante de nombres équilibrés.

Q6 : Générer en langage Python des nombres équilibrés.

Écrire une fonction `liste_equilibres(n)` prenant en argument un entier `n` au moins égal à 2 et renvoyant la liste `[u_1, u_2, ..., u_n]`. On rappelle que `[ ]` est la liste vide et que, étant donnés une liste `L` et un entier `i`, la commande `L.append(i)` ajoute l'élément `i` à la liste `L` en le plaçant à la fin. On utilisera l'instruction `sqrt()` pour coder la fonction racine carrée.

Corrigé de l'exercice 1 : Plus fort !

Q1 : **(a)** Au bout d'un tour, on obtient $1 + 5 = 1$. Au bout de deux tours, on obtient $1 + 10 = 1$. En ajoutant encore 2, il vient $1 + 12 = 3$. Visuellement, on a fait 2 tours d'horloge + 2 crans.

(b) Avec $n = 11$, au bout d'un tour, on a $1 + 11 = 1$. Si on avance encore d'un cran, cela donne $1 + 12 = 2$. Cette valeur de n est la seule possible. En effet, si l'équation est vérifiée 12 vaut 1 additionné à un multiple de n, et donc n divise 11, qui est premier, donc $n = 11$.

Q2 :

(a) C'est certain, Beethoven aurait été un compositeur modeste s'il avait été bien entendant.

(b) Un arrêté municipal interdit le ramassage des escargots. Une association demande de revenir sur cette décision. La mairie reste inflexible.

Q3 : Avec une demi-coupe, les cotes sont diminuées de moitié dans toutes les directions. Donc le volume est divisé par 8. On peut donc remplir 8 demi-coupes avec une coupe entière.

Q4 : On superpose le verre penché et le verre droit.

Avec les notations, on a $\mathrm{AB} = \dfrac{\mathrm{AC}}{2}$, car AC est le rayon du cercle, et car le verre est rempli à moitié.

Donc $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{1}{2}$, donc l'angle maximum vaut $x = 30°$.

Q5 :

(a) Si n est supérieur ou égal à 100 et si chacun paye déjà son menu à 40 euros, cela donne $40n$ euros qui est bien supérieur à 4000 euros : l'adjecteur est restauration et atteint et les convives n'auront pas besoin de payer davantage.

Si n est strictement inférieur à 100 et si chacun paye son menu à 40 euros, cela donne au total $40n$ euros qui est inférieur strictement à 4000 euros. Selon les conditions du restaurateur, les convives vont devoir payer un peu plus pour que la recette attaque bien 4000 euros. Ils payeront $4000/n$ euros par personne.

Lorsque $n = 90$, on a vu que les convives vont devoir payer chacun $4000/90$ euros. C'est compris entre 4.44 euros et 4.45 euros : chacun payera donc 4.46 euros.

(b) On répartit la subvention sur les 90 convives. Selon le calcul précédent, chacun payera donc $4000/90 - 1000/90$: cela donne 33.34 euros par personne.

Lorsque 120 personnes viennent chacun payer $40 - 1000/120$ euros (chacun payer son menu – sa part de subvention). Cela donne 31.67 euros.

Si n est supérieur ou égal à 100, le prix par convive est $40 - 1000/n$. Cette quantité est minimale pour $n = 100$ et vaut 30 (euros).

Si n est inférieur strictement à 100, le prix par convive est $4000/n - 1000/n$ c'est-à-dire $3000/n$. Cette quantité est minimale pour $n = 99$ et est supérieure à 30 (car $30 = 3000/100$).

Conclusion : Le prix par convive est minimal lorsqu'il y a exactement 100 convives et le prix à payer par chacun est alors de 30 euros.

Q6 : Notons R le rayon de la tarte. Et $x \in [0, \mathrm{R}]$ l'endroit du bord où l'on va couper. L'aire de la portion totale de la vue vaut $\dfrac{\pi \mathrm{R}^2}{4}$ et l'aire de la portion gauche de tarte vaut $\dfrac{x^2}{2}$. Ce dernier doit valoir la moitié de l'aire totale.

Donc $x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{R}$.

Q7 : On note S le sommet d'où partent les trois arêtes à angles droits, on note A, B et C les autres sommets (C étant en arrière) et enfin, on note $a = \mathrm{SA}$, $b = \mathrm{SB}$ et $c = \mathrm{SC}$. Appelons d la hauteur issue de B du triangle oblique ABC, et H le pied de cette hauteur. L'aire au carré du triangle oblique vaut $\mathrm{AC}^2 d^2/4$. Puis dans le triangle rectangle HSB, $d^2 = \mathrm{SH}^2 + b^2$. Mais (SH) est aussi perpendiculaire à (AC). Donc l'aire du triangle de base, à savoir le triangle ASC, vaut à la fois $\dfrac{ac}{2}$ et $\dfrac{\mathrm{SH} \cdot \mathrm{AC}}{2}$. Il reste à tout recoller puisque $\mathrm{AC}^2 = a^2 + c^2$. Dès lors, $\mathrm{SH}^2(a^2 + c^2) = a^2c^2$. Et donc $d^2(a^2 + c^2) = \mathrm{SH}^2(a^2 + c^2) + b^2(a^2 + c^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2$.

Corrigé de l'exercice 2 : Recherche d'équilibre : les nombres sur le fil

Q1 : Quelques exemples.

a. $1 + 2 + \cdots + 5 = 15$ et $7 + 8 = 15$ donc 6 est équilibré de balance 2.

b. $1 + 2 + \cdots + 6 = 21$ et $8 + 9 = 17 < 21 < 27 = 8 + 9 + 10$.

c. On a

$$1+2+3+\cdots+203=\frac{203\times(203+1)}{2}=20706$$

et

$$(204+1)+(204+2)+\cdots+(204+84)=\frac{84\times(2\times 204+84+1)}{2}=20416$$

Q2 :

a. Si n est équilibré de balance b, on a :

$$\frac{(n-1)n}{2}=\frac{b(2n+b+1)}{2}$$

donc

$$n^2-n=2bn+b^2+b$$

On en déduit que

$$b^2+(2n+1)b+(n-n^2)=0$$

donc b est solution d'une équation du second degré dont le discriminant est égal à $8n^2+1$ qui est strictement positif. L'équation admet donc deux solutions :

$$\frac{-(2n+1)+\sqrt{8n^2+1}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-(2n+1)-\sqrt{8n^2+1}}{2}$$

Comme b est un entier strictement positif, on a nécessairement $b=\dfrac{-(2n+1)+\sqrt{8n^2+1}}{2}$.

On en déduit que $8n^2+1=(2b+2n+1)^2$ donc $8n^2+1$ est un carré parfait.

b. Comme $e^2=8n^2+1$, e^2 est impair, ce qui impose que e l'est aussi. On en déduit que $b=\dfrac{e-(2n+1)}{2}$ est un entier. Montrer que $b>0$ revient à établir que $2n+1<\sqrt{8n^2+1}$, ce qui est aisé en comparant les carrés de ces deux nombres positifs (on rappelle que $n>1$).

c. La question 2.a donne le sens direct tandis que la question 2.b fournit la réciproque : puisque $b=\dfrac{-(2n+1)+\sqrt{8n^2+1}}{2}$ on a une solution de l'équation

$$x^2+(2n+1)x+(n-n^2)=0$$

ce qui montre que

$$b^2+(2n+1)b+(n-n^2)=0$$

On en déduit finalement que

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}=\frac{b(2n+b+1)}{2}=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+b)$$

ce qui montre que n est un nombre équilibré de balance b.

Q3 :

a. On calcule :

$$\begin{aligned}8f(x)^2+1&=8\left(9x^2+6x\sqrt{8x^2+1}+8x^2+1\right)+1\\&=136x^2+48x\sqrt{8x^2+1}+9\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(8x+3\sqrt{8x^2+1})^2&=64x^2+48x\sqrt{8x^2+1}+9(8x^2+1)\\&=136x^2+48x\sqrt{8x^2+1}+9\end{aligned}$$

b. Soit n un nombre équilibré. D'après la question 2.a, $f(n)$ est bien un entier. On remarque par ailleurs que, comme $n\geq 2$, on a : $f(n)\geq 2$. Enfin, d'après la question 3.a, $8f(n)^2+1$ est un carré parfait. D'après la question 2.b, on conclut que $f(n)$ est un nombre équilibré.

c. On sait que 6 est un nombre équilibré. Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul k, $\dfrac{f(k)}{k}>1$ donc $f(k)>k$. On en déduit que les nombres

$$6, f(6), f(f(6)), f(f(f(6))), \ldots$$

sont des nombres équilibrés (question 3.b) deux à deux distincts classés dans l'ordre croissant, ce qui donne le résultat.

d. On sait que $u_k = 3u_{k-1} + \sqrt{8u_{k-1}^2 + 1}$ donc $(u_k - 3u_{k-1})^2 = 8u_{k-1}^2 + 1$. On obtient, après simplifications : $u_{k-1}^2 - 6u_k u_{k-1} + u_k^2 - 1 = 0$ donc u_{k-1} est solution d'une équation du second degré dont le discriminant est égal à $4(8u_k^2 + 1)$ qui est strictement positif. L'équation donne donc deux solutions, qui sont

$$3u_k + \sqrt{8u_k^2 + 1} \quad \text{et} \quad 3u_k - \sqrt{8u_k^2 + 1}$$

Comme $u_{k-1} < u_k$, on a donc nécessairement : $u_{k-1} = 3u_k - \sqrt{8u_k^2 + 1}$.

e. On remarque que h est dérivable et que pour tout $x > 0$

$$h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{8x+1}}$$

Or, $(3\sqrt{8x+1})^2 = 9(8x+1) = 72x + 9$, $(8\sqrt{x})^2 = 64x$ donc $3\sqrt{8x+1} - 8\sqrt{x} > 0$. Comme $2\sqrt{x}\sqrt{8x+1} > 0$, on en déduit que $h'(x) > 0$. Ainsi h est strictement croissante. Pour tous réels x et y tels que $0 < x < y$, on a : $0 < x^2 < y^2$. Donc, comme h est strictement croissante, $h(x^2) < h(y^2)$ donc $g(x) < g(y)$. Ainsi g est strictement croissante.

f. $u_2 = f(u_1) = f(6) = 35$. Puisque n est équilibré, on déduit du résultat admis par l'énoncé que si $n \leq 35$, alors $n = 6$ ou $n = 35$. Or, $u_1 = 6$ et $u_2 = 35$ et n n'est pas de la forme u_k. On en déduit que $n > 35$, c'est-à-dire que $n > u_2$. Puisque la suite d'entiers naturels $(u_k)_{k\geq 1}$ est strictement croissante, il existe un entier $m \geq 2$ tel que $u_m < n < u_{m+1}$.

On déduit de la croissance de g établie à la question 3.e que $g(u_m) < g(n) < g(u_{m+1})$. Or, d'après la question 3.d, $g(u_m) = u_{m-1}$ et $g(u_{m+1}) = u_m$. D'où $u_{m-1} < g(n) < u_m$. Comme $u_m < n$, on a donc $g(n) < u_m < n$ donc $g(n) < n$.

D'après la question 3.b, $n > 35$ donc $n > 6$. Or, n est un nombre équilibré. On vérifie (comme on l'a fait avec $f(n)$) que $g(n)$ l'est aussi. On en déduit que $g(n)$ est un nombre équilibré qui ne s'écrit pas sous la forme u_k pour un certain entier $k \geq 1$. Finalement n n'est pas le plus petit nombre équilibré ne s'écrivant pas sous forme u_k pour un certain entier $k \geq 1$, ce qui est absurde par définition de n. Ainsi, tout nombre équilibré est de la forme u_k pour un certain entier $k \geq 1$.

Q4 :

a. Soit $k \geq 2$ un entier. Alors $u_{k+1} = 3u_k + \sqrt{8u_k^2 + 1}$ et, d'après la question 3.d, $u_{k-1} = 3u_k - \sqrt{8u_k^2 + 1}$. Donc $u_{k+1} = 3u_k + (3u_k - u_{k-1}) = 6u_k - u_{k-1}$.

b. Dans s, on calcule $s = 1 + \ldots + i$ jusqu'à ce que i arrive à n (exclu). La fonction `mystere(n)` calcule donc la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$.

c. On déduit de la question 4.b la fonction suivante.

```
def equilibre(n):
    k = mystere(n)   # k vaut 1+2+...+(n-1)
    s = n+1
    i = n+2
    while s < k:
        s = s + i
        i = i + 1
    return s == k
```

Dans s, on calcule $s = (n+1) + \ldots + i$ jusqu'à ce que cette somme dépasse le seuil k. On regarde alors si la balance est équilibrée.

Mais on peut aussi écrire la fonction suivante, de complexité bien meilleure, en exploitant la question 4.a.

```
def equilibre(n):
    (a, b) = (6, 35)
    while a < n:
        (a, b) = (b, 6*b - a)
    return a == n
```

Q5 : On propose ici aussi deux solutions, la seconde étant plus efficace que la première.
La première fonction utilise la question 4.c.

```
def liste_equilibres(n):
    l = []
    for i in range(2, n):
        if equilibre(i):
            l.append(i)
    return l
```

La seconde fonction exploite encore la question 4.a.

```
def liste_equilibres(n):
    l = []
    (a, b) = (6, 35)
    while a < n:
        l.append(a)
        (a, b) = (b, 6*b - a)
    return l
```

Remarques

La balance de 6930 est 2870.

La balance de 235416 est 97512.

La balance de 313506783024 est 129858761424.

`liste_equilibres(1000000000000)` renvoie

`[6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416, 1372105, 7997214, 46611179, 271669860, 1583407981, 9228778026, 53789260175, 313506783024]`

Corrigé de l'exercice 3 : Recherche d'équilibre : les nombres sur le fil

Identique à l'exercice 2. À la numérotation et à ceci près :

Q1 : Méthode de Gauss

Q2 : Par exemple en soustrayant deux sommes partant de 1 (ou bien en regroupant tous les n).

Q3 :

```
def liste_equilibres(n):
    l = []
    u = 6
    for compteur in range(n):
        l.append(u)
        u = 3*u + sqrt(8*u**2 + 1)
    return l
```