



Nice 2024

■ Exercice 1. Génération à la suite

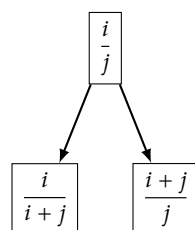
Partie A - Les fils d'une fraction strictement positive

Soient i et j des entiers strictement positifs.

On dit que les deux **fils** de la fraction $\frac{i}{j}$ sont les fractions $\frac{i}{i+j}$ et $\frac{i+j}{j}$.

On dit que $\frac{i}{i+j}$ est le **fils gauche** et que $\frac{i+j}{j}$ est le **fils droit** de $\frac{i}{j}$.

L'arbre ci-dessous illustre la situation.



Par exemple, $\frac{7}{5}$ a deux fils : son fils gauche est $\frac{7}{7+5} = \frac{7}{12}$ et son fils droit est $\frac{7+5}{5} = \frac{12}{5}$.

Q1 : Quels sont les deux fils de $\frac{8}{9}$?

Q2 : Trouver la fraction dont un des fils est $\frac{3}{8}$.

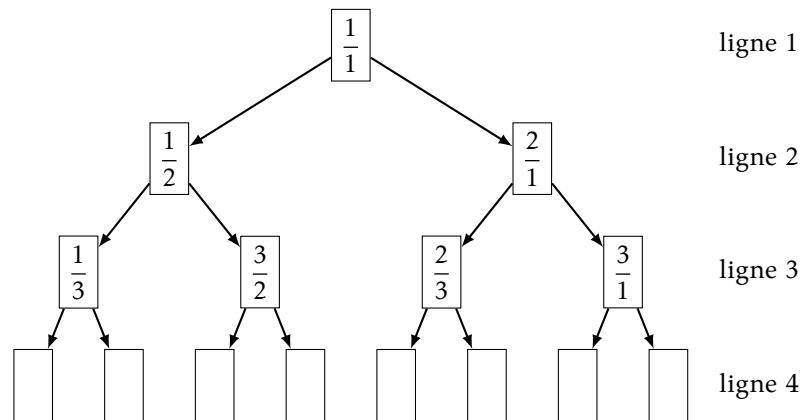
Q3 : Trouver la fraction dont un des fils est $\frac{111}{7}$.

Q4 : De manière générale, justifier que l'un des fils de $\frac{i}{j}$ est inférieur strictement à 1 et que l'autre est supérieur strictement à 1.

Partie B - Arbre et suite de Calkin-Wilf

L'**arbre de Calkin-Wilf** s'obtient en prenant la fraction $\frac{1}{1}$ à la racine et en associant à chaque fraction ses deux fils (comme dans la partie A).

On a commencé à représenter les quatre premières lignes de cet arbre :



Q5 : Donner, sur sa copie, toutes les fractions de la ligne 4 de cet arbre.

Q6 : Montrer que la fraction $\frac{44}{13}$ apparaît dans l'arbre. Sur quelle ligne apparaît-elle ?

La **suite de Calkin-Wilf** est la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ des fractions lues de gauche à droite, ligne par ligne en descendant l'arbre de Calkin-Wilf.

Ainsi, les premiers termes de la suite (u_n) sont :

$$u_1 = \frac{1}{1}, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 = \frac{2}{1}, \quad u_4 = \frac{1}{3}, \quad u_5 = \frac{3}{2}, \quad u_6 = \frac{2}{3}, \quad u_7 = \frac{3}{1}.$$

Q7 : Donner la fraction égale à u_{32} .

Q8 : On constate que les deux fils de u_3 sont u_6 et u_7 .

Recopier et compléter, sur sa copie, les deux phrases suivantes (aucune justification n'est attendue).

«Les deux fils de u_6 sont $u_{\dots}$ et $u_{\dots}$.»

«Si n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1, les deux fils de u_n sont $u_{\dots}$ et $u_{\dots}$.»

Partie C - Suite de Stern

La **suite de Stern** est la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ dont les termes sont les numérateurs des fractions lues de gauche à droite, ligne par ligne en descendant l'arbre de Calkin Wilf.

Cette suite commence donc par : $v_1 = 1, v_2 = 1, v_3 = 2, v_4 = 1, v_5 = 3, v_6 = 2, v_7 = 3$.

Q9 : Donner les valeurs numériques de v_8 à v_{15} .

On admet que **pour tout entier naturel n non nul**, le dénominateur de la n^{e} fraction de la suite de Calkin-Wilf est égal au numérateur de la $(n+1)^{\text{e}}$.

Autrement dit, on admettra que pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n = \frac{v_n}{v_{n+1}}$.

Q10 : Utiliser les questions précédentes pour montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a les égalités suivantes : $v_{2n} = v_n$ et $v_{2n+1} = v_n + v_{n+1}$.

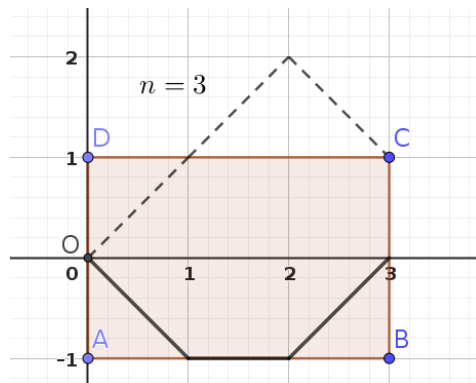
Q11 : En déduire les valeurs numériques de v_{64} et v_{65} .

■ Exercice 2. Parcours gagnants!

Dans cet exercice, on se place dans un repère orthonormé d'origine O et n désigne un entier naturel non nul. Max le robot est positionné initialement au point O . Il enchaîne n translations consécutives choisies de manière aléatoire et équiprobable parmi les translations de vecteurs $\vec{u}(1; 1)$, $\vec{v}(1; 0)$ ou $\vec{w}(1; -1)$. Max le robot parvient au point d'arrivée d'abscisse n .

On appelle **parcours** une liste ordonnée de n vecteurs choisis parmi les vecteurs $\vec{u}(1; 1)$, $\vec{v}(1; 0)$ ou $\vec{w}(1; -1)$. On appelle alors n la **taille** du parcours.

Dans le repère orthonormé ci-dessous, est représenté en pointillés un exemple de parcours de taille 3 de Max : $(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w})$. Le point d'arrivée de Max est le point de coordonnées $(3; 1)$.



Un parcours de taille n est dit **gagnant** si Max n'est jamais sorti du rectangle ABCD, côtés inclus, où $A(0; -1)$, $B(n; -1)$, $C(n; 1)$, $D(0; 1)$.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, le parcours $(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w})$ en pointillés, n'est pas gagnant alors que le parcours $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$, en trait plein, est gagnant.

L'objectif de cet exercice est de calculer la probabilité qu'un parcours de taille n donnée soit gagnant.

Partie A - Cas $n = 3$

Dans cette partie, on fixe $n = 3$.

Q1 : Combien a-t-on de parcours possibles ?

Q2 : Citer les listes des parcours gagnants dont le premier vecteur est $\vec{u}$.

Q3 : Citer les listes des parcours gagnants dont le premier vecteur est $\vec{v}$.

Q4 : En déduire que la probabilité qu'un parcours de taille 3 soit gagnant est égale à $\frac{17}{27}$.

Partie B - Une simulation

On considère la fonction incomplète écrite en Python ci-dessous :

```
from random import *
```

```
def parcours(n):
```

```
    y = 0
```

```
    gagnant = True
```

```
    for x in range(1, n+1):
```

```
        vecteur = choice(["u", "v", "w"])
```

```
        if vecteur == "u":
```

```
            y = y + 1
```

```
        if vecteur == "w":
```

```
            ...
```

```
        if y > 1 or ...:
```

```
            gagnant = False
```

```
    return gagnant
```

• L'instruction `range(1, n+1)` correspond à la liste des entiers 1, 2, ..., n.

• L'instruction `choice(["u", "v", "w"])` permet de choisir une lettre, au hasard, et de manière équiprobable, parmi les lettres u, v et w.

Préciser comment compléter les lignes 11 et 12 de la fonction `parcours(n)` afin qu'elle réalise une simulation d'un parcours de Max de taille n et renvoie `True` si ce parcours est gagnant et `False` sinon.

Partie C - Calculs de proche en proche

Dans la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel non nul.

On note :

- a_n le nombre de parcours de taille n qui sont gagnants et dont le point d'arrivée est de coordonnées $(n; 1)$;
- b_n le nombre de parcours de taille n qui sont gagnants et dont le point d'arrivée est de coordonnées $(n; 0)$;

- c_n le nombre de parcours de taille n qui sont gagnants et dont le point d'arrivée est de coordonnées $(n; -1)$;
- On note T_n le nombre de parcours de taille n qui sont gagnants. On a donc $T_n = a_n + b_n + c_n$.

Q5 : Quelles sont les valeurs de a_1 , b_1 , c_1 et T_1 ?

Q6 : On admet que l'on a $a_n = c_n$.

- Justifier la relation $a_{n+1} = a_n + b_n$.
- Justifier la relation $b_{n+1} = 2a_n + b_n$.
- Démontrer alors la relation $T_{n+2} = 2T_{n+1} + T_n$.

Q7 : Recopier et compléter sur sa copie le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5
a_n					
b_n					
T_n					

Q8 : Démontrer que la probabilité qu'un parcours de taille 5 soit gagnant est égal à $\frac{11}{27}$.

Partie D - Expression explicite

Les nombres T_n sont ceux définis à la partie C.

On rappelle que pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$T_{n+2} = 2T_{n+1} + T_n$$

Ce résultat pourra être utilisé dans cette partie même s'il n'a pas été démontré dans la partie B.

Q9 : Déterminer les valeurs exactes des deux nombres réels distincts x_1 et x_2 qui sont solutions de l'équation $x^2 = 2x + 1$ et telles que $x_1 < x_2$.

Q10 : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} x_1^n + \frac{1 + \sqrt{2}}{2} x_2^n$$

où x_1 et x_2 sont les nombres réels définis à la question précédente.

- Vérifier que l'on a $u_1 = T_1$.
On admettra que $u_2 = T_2$.
- En utilisant $x_1^2 = 2x_1 + 1$ et $x_2^2 = 2x_2 + 1$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$.
- En déduire une expression explicite de T_n en fonction de n .
- En déduire la probabilité qu'un parcours de taille n soit gagnant en fonction de n .

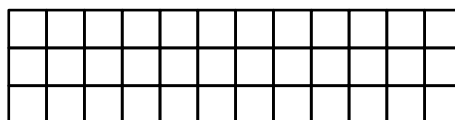
■ Exercice 3. Pavages en or

Cet exercice comprend une page annexe à rendre avec la copie.

Définition : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Une **grille** est un quadrillage rectangulaire de largeur n carreaux et de hauteur h carreaux.

Par exemple, une grille de largeur 12 carreaux et de hauteur 3 carreaux est de la forme :



Partie A - Pavage d'une grille de hauteur 2 carreaux

Dans cette partie, on considère uniquement des grilles de largeur n carreaux et de hauteur 2 carreaux. On souhaite paver cette grille (c'est-à-dire la recouvrir entièrement) à l'aide de briques rectangulaires :

- ▷ celles placées horizontalement désignées par
- ▷ celles placées verticalement désignées par

On ne peut pas superposer deux briques.

Par exemple, on peut débiter le pavage d'une grille de largeur 7 carreaux ainsi :

○	○	×				
○	○	×				

Définition : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note $P(n)$ le **nombre de pavages** d'une grille de largeur n carreaux et de hauteur 2 carreaux.

Q1 : Déterminer $P(1)$ et $P(2)$.

Q2 : On admet que $P(3) = 3$ et $P(4) = 5$.

Sur les grilles données en **annexe A2**, à **rendre avec la copie**, dessiner tous les pavages pour $n = 3$ et $n = 4$.

Q3 : a) Justifier que pour tout $n \geq 1$, $P(n+2) = P(n+1) + P(n)$.

On pourra distinguer si la dernière colonne à droite contient une brique verticale ou non.

b) En déduire $P(5)$ et $P(6)$.

Q4 : a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer $P(n)$ pour $n \geq 3$.

def $P(n)$:

$p1 = \dots$

$p2 = \dots$

for i **in** $\text{range}(3, n+1)$:

$p = \dots$

$p1 = p2$

$p2 = p$

return p

Rappel : L'instruction $\text{range}(3, n+1)$ correspond à la liste des entiers 3, 4, ..., n .

b) Donner $P(10)$ sans justification.

Partie B - Le nombre d'or s'y cache

Définition :

On considère deux nombres réels strictement positifs a et b tels que $a > b$.

Le **nombre d'or** est l'unique rapport $\phi = \frac{a}{b}$ tel que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

Q5 : a) Montrer que ϕ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

b) En déduire que $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

Q6 : a) Pour $n \geq 1$, on définit les nombres $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \phi^{n+1}$.

En arrondissant si besoin les résultats à 0,1 près, recopier et compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	10
$P(n)$						
F_n						

b) Que remarquez-vous ?

Partie C - Pavage d'une grille de hauteur 3 carreaux

On considère dans cette partie une grille de largeur n carreaux et de hauteur 3 carreaux.

On souhaite réaliser un pavage formé des mêmes briques rectangulaires utilisées dans la partie A.

Q7 : Dans cette question uniquement, on considère une grille de largeur $n = 3$ carreaux.

Est-il possible de paver une telle grille ? Justifier.

Q8 : Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

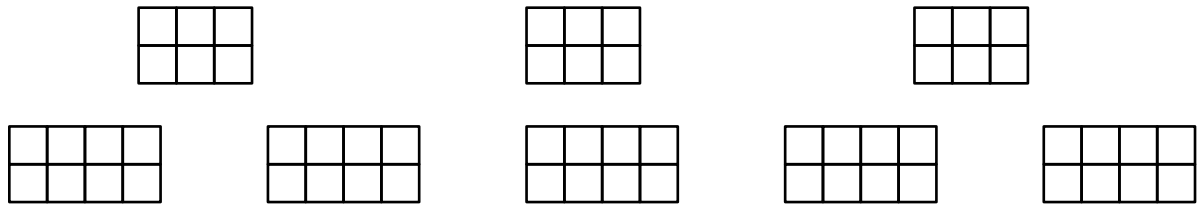
À quelle condition sur n peut-on réaliser un pavage avec ces briques ?

Q9 : Déterminer le nombre de pavages d'une grille de largeur 2 carreaux et de hauteur 3 carreaux.

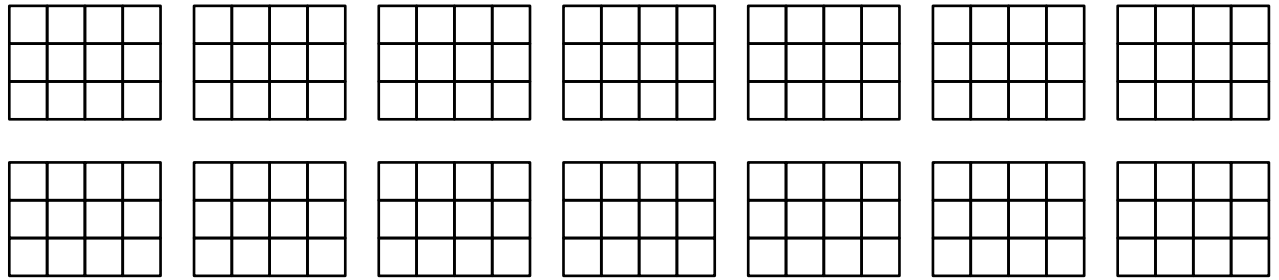
Q10 : À l'aide des grilles données en **annexe C**, à **rendre avec la copie**, dessiner tous les pavages pour $n = 4$.

Annexe - Pavages en or - À rendre avec la copie

Annexe A2 (Partie A)



Annexe C (Partie C)



■ Exercice 4. L'île aux pixels

Cet exercice comprend une page annexe à rendre avec votre copie.

Partie A - Un codage binaire

- Q1 :** Sur l'**annexe A1**, on a représenté les déplacements le long du contour de l'île n° 1 formée de deux pixels. Le code du contour de l'île est : 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0. Écrire le code du contour pour les îles n° 2 et n° 3.
- Q2 :** Sur l'**annexe A2**, en coloriant les pixels du contour, dessiner le contour :
- a) de l'île n° 4 dont le code du contour est 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0,
 - b) de l'île n° 5 dont le code du contour est 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0.
- Q3 :** (a) Le code du contour d'une île est 1 0 0 0 1 0 0 0. Recopier la figure fournie et indiquer les déplacements du robot.
- (b) Quelle est alors la forme de l'île?

Partie B - Quelques propriétés du code

- Q1 :** Quel est le premier chiffre d'un code? Quel est le dernier chiffre d'un code?
- Q2 :** Supposons que le robot produise un code contenant la suite 1 1 1 1.
- (a) Réaliser une figure correspondant à cet extrait de code.
 - (b) En déduire que la suite 1 1 1 1 ne peut pas apparaître dans le code.
- Q3 :** Réaliser une figure correspondant à l'extrait de code 1 0 0 0. Quel effet a cet extrait de code pour la direction du robot?

Partie C - Une forme d'île problématique

- Q1 :** Sur l'**annexe C1**, compléter le parcours du robot pour chaque situation donnée.
- Q2 :** Le robot peut-il toujours parcourir tout le contour de l'île?

■ Exercice 5. Nombres ploutons

Partie A - Les tout-petits ploutons

- Q1 :** Compléter le tableau suivant et donner les quatre premiers nombres ploutons classés dans l'ordre croissant.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$d(n)$												

Q2 : Montrer qu'il n'existe pas de nombre premier autre que 2 qui soit un nombre plouton.

Q3 : Quel est le plus petit nombre plouton strictement supérieur à 12?

Q4 : L'objectif de cette question est de déterminer s'il existe ou non une infinité de nombres ploutons.

(a) Soit k un entier naturel. Justifier que $d(2^k) = k + 1$.

(b) Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres ploutons. Dans ce cas, on note N le plus grand nombre plouton et on note $k = d(N)$. Mettre en évidence une contradiction.

(c) Existe-t-il une infinité de nombres ploutons?

Partie B - Les ploutons inférieurs ou égaux à 200

Q1 : Donner les décompositions des quatre premiers nombres ploutons.

Q2 : Est-il vrai que si $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$ avec a, b et c entiers naturels tels que $n \leq 200$ alors n est nécessairement un nombre plouton? Justifier la réponse.

Q3 : On considère le nombre $2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60$. Dresser la liste des douze diviseurs de 60 en indiquant leur décomposition.

Q4 : Est-il vrai que tous les nombres entiers naturels non nuls et inférieurs ou égaux à 200 admettent une décomposition $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$ où a, b et c sont des entiers naturels? Justifier la réponse.

Q5 : Soit n un nombre plouton admettant comme décomposition $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$. Montrer que $d(n) = (a + 1) \times (b + 1) \times (c + 1)$.

Q6 : Soit n un nombre entier naturel admettant comme décomposition $2^a \times 3^b \times 5^c$.

(a) Montrer que si n est un nombre plouton, alors $a \geq b \geq c$.

(b) Montrer que la réciproque est fautive en considérant le nombre 30.

Q7 : Compléter le tableau suivant contenant les 21 nombres inférieurs à 200 admettant une décomposition de la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$.

a	b	c	$n = 2^a \times 3^b \times 5^c$	$d(n)$
0	0	0	1	1
1	0	0	2	2
1	1	0	6	
1	1	1		
2	0	0		
2	1	0		
2	1	1		
2	2	0		
2	2	1		
3				
3				
3				
3				
4				
4				
4				
5				
5				
6				
6				
7				

Q8 : Déterminer les dix nombres ploutons inférieurs à 200.

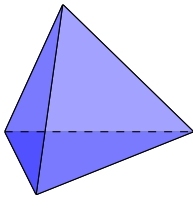
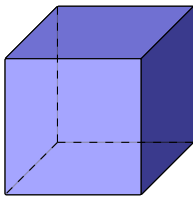
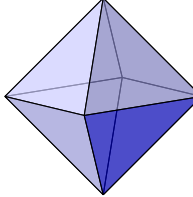
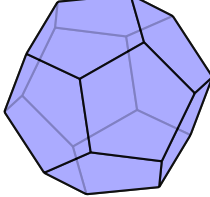
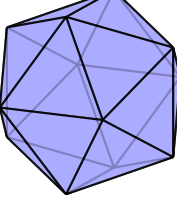
■ Exercice 6. Platon footballeur

Cet exercice comprend une page annexe à rendre avec votre copie.

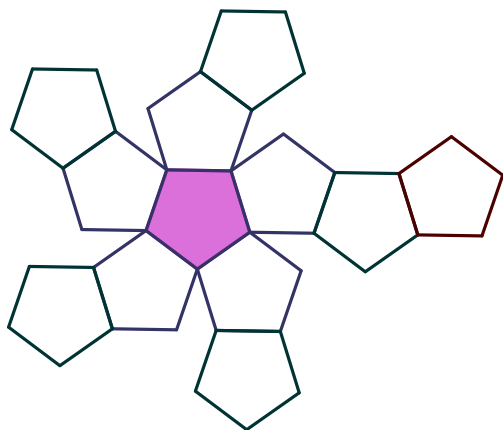
À la fin des années soixante, pour préparer la coupe du monde de football de 1970, la fédération de football du Mexique décide de la fabrication d'un nouveau type de ballon. Elle demande à une équipe d'ingénieurs de se charger des recherches. L'équipe décide de considérer, comme base de travail, les solides de Platon.

Partie A - Les solides de Platon

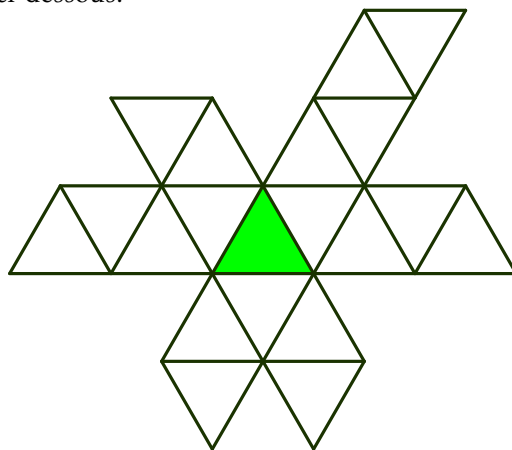
Les **solides de Platon** sont les cinq seuls solides dont les faces sont des polygones réguliers.

Les solides de Platon				
Tétraèdre	Hexaèdre (cube)	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre
				

Pour un solide de Platon, on note F le nombre de faces, S le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes. Compléter le tableau sur l'**annexe partie A (à rendre avec votre copie)**. L'avant-dernière colonne est un calcul à faire sur les nombres indiqués dans les trois colonnes précédentes. On pourra s'aider des patrons de certains solides de Platon ci-dessous.



Patron du dodécaèdre



Patron de l'icosaèdre

Partie B - Angles et faces

Chaque face d'un solide de Platon est un polygone régulier, c'est-à-dire un polygone dont les sommets sont situés sur un même cercle, et qui a tous ses côtés de même longueur.

Par exemple :

- ▷ une face d'un tétraèdre régulier est un triangle équilatéral ;
- ▷ une face d'un cube est un carré ;
- ▷ une face d'un dodécaèdre régulier est un pentagone régulier.

Face d'un tétraèdre régulier

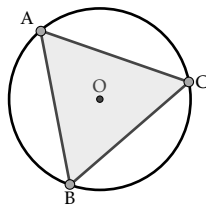


Figure 1

Face d'un cube

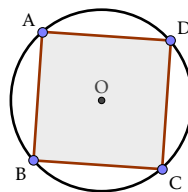


Figure 2

Face d'un dodécaèdre régulier

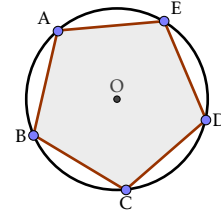


Figure 3

Dans la suite du problème, on choisira de donner les mesures des angles demandées en degrés (°).

Q1 : Rappeler, sans justifier, une mesure de l'angle géométrique :

- (a) $\widehat{BAC}$ du triangle équilatéral (Figure 1).
- (b) $\widehat{BAD}$ du carré (Figure 2).

Q2 : Justifier, dans le cas du pentagone régulier (Figure 3), que $\widehat{BAE}$ mesure 108° .

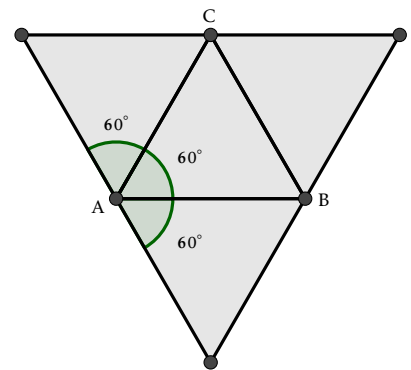
Partie C - Rotondité

Pour évaluer la **rotondité** d'un polyèdre (le fait que le polyèdre se rapproche plus ou moins d'une sphère), les ingénieurs décident de calculer la somme des angles vus d'un des sommets du polyèdre, en se disant que plus cette somme est proche de 360° , plus le polyèdre sera «rond».

On admet que la rotondité d'un solide évoqué dans ce sujet est la même en chaque sommet.

Par exemple pour le tétraèdre régulier, on trouve comme rotondité 180° en se reportant au patron et en effectuant la somme des trois angles de sommet A, des trois triangles équilatéraux (voir figure ci-contre).

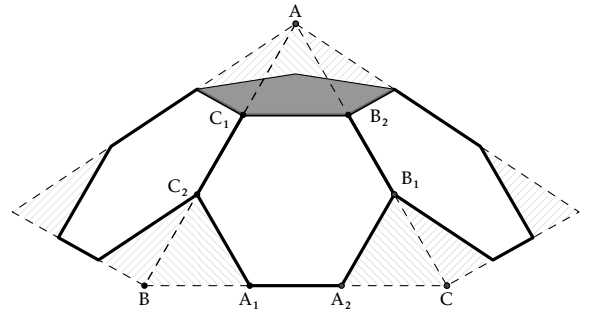
- Q1 : (a) Dessiner un patron de cube.
(b) Choisir un des sommets du patron pour calculer la rotondité du cube comme sur l'exemple du tétraèdre.
- Q2 : Compléter le tableau sur l'**annexe partie C (à rendre avec votre copie)**.
- Q3 : Quel solide auraient dû alors proposer les ingénieurs ?



Partie D - Retour au ballon de football

Les ingénieurs décident d'améliorer la rotondité de l'icosaèdre, en lui apportant des modifications. Ils procèdent de la manière suivante :

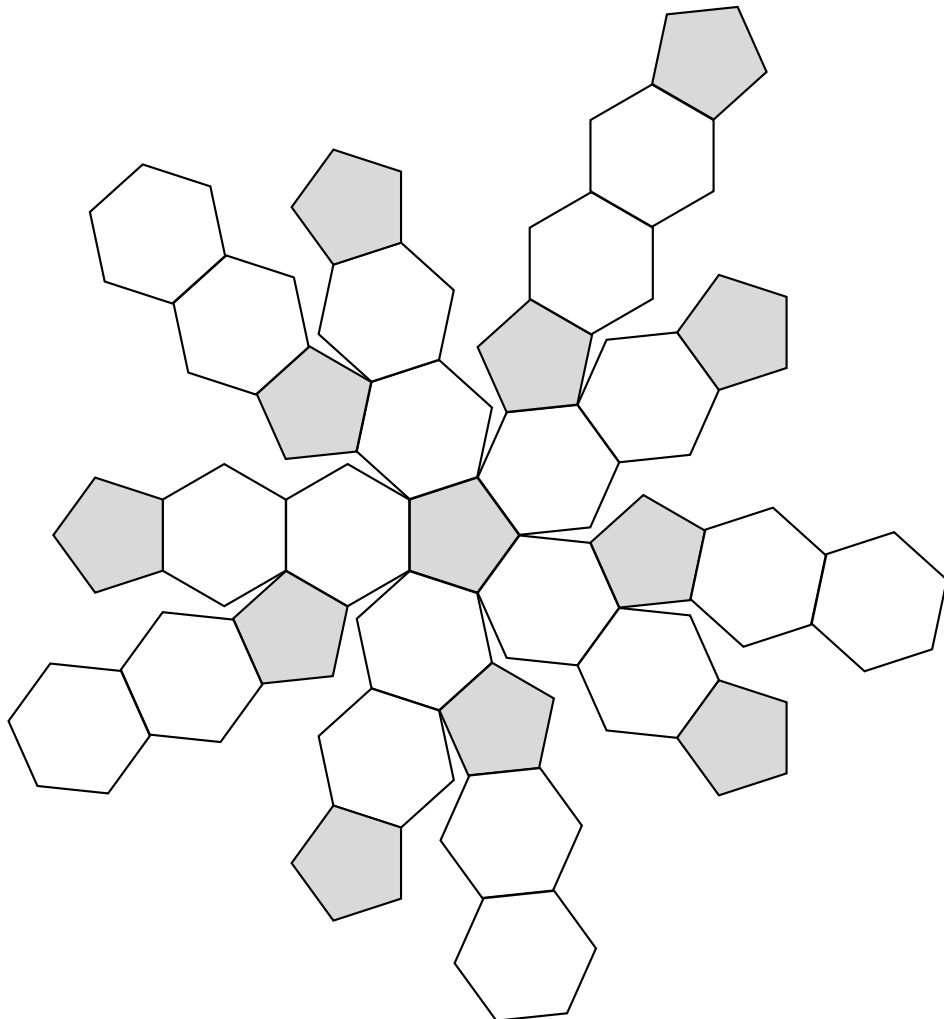
- ▷ Chaque côté d'une face triangulaire est découpé en trois segments de même longueur. Par exemple, sur la figure ci-contre, le côté $[AB]$ de la face ABC est découpé en trois segments $[AC_1]$, $[C_1C_2]$ et $[C_2B]$ de même longueur. La même chose est réalisée pour les deux autres côtés $[AC]$ et $[BC]$ et les triangles AC_1B_2 , BA_1C_2 et CB_1A_2 sont enlevés.
- ▷ L'hexagone régulier $C_1C_2A_1A_2B_1B_2$ ainsi obtenu forme une face du nouveau solide.
- ▷ Et les bases des 5 triangles enlevés de sommet A forment un pentagone régulier (en gris sur la figure) et constitue une nouvelle face du solide.
- ▷ Sur la figure ci-contre les hachures représentent les faces retirées et, en gris foncé, un des pentagones.



En réalisant cette transformation sur chacune des faces de l'icosaèdre, les ingénieurs obtiennent ainsi un nouveau solide que nous allons maintenant étudier. Le patron de ce solide est donné ci-dessous.

- Q1 :** Combien et quels types de polygones voit-on depuis chaque sommet de ce nouveau solide ? (par exemple à partir du sommet C_1)
- Q2 :** Calculer la rotondité à partir du sommet C_1 .
- Q3 :** Ce nouveau solide répond-il mieux que les solides de Platon aux exigences de rotondité ?
- Q4 :** Donner les nombres de faces (F), de sommets (S) et d'arêtes (A) de ce solide, en justifiant les réponses.
- Q5 :** Calculer $F + S - A$.

Patron du ballon de football.



Annexe partie A

Nom du polyèdre	Nombre de faces (F)	Nombre de sommets (S)	Nombre d'arêtes (A)	$F + S - A$	Nature de la face
Tétraèdre	4				triangle équilatéral
Cube					
Octaèdre	8				
Dodécaèdre	12		30	2	pentagone régulier
Icosaèdre	20	12		2	

Annexe partie C

Nom du polyèdre	Nom du polygone (face)	Nombres de polygones réguliers partant d'un sommet du polyèdre	Angle formé par 2 côtés du polygone	Somme des angles des polygones vus d'un sommet du polyèdre
Tétraèdre	triangle équilatéral	3	60°	$3 \times 60^\circ = 180^\circ$
Cube				
Octaèdre				
Dodécaèdre	pentagone régulier			
Icosaèdre				

Corrigé de l'exercice 1 : Génération à la suite

Partie A - Les fils d'une fraction strictement positive

Q1 : Son fils gauche est $\frac{8}{8+9} = \frac{8}{17}$ et son fils droit est $\frac{8+9}{9} = \frac{17}{9}$

Q2 : La fraction est $\frac{3}{5}$

Q3 : La fraction est $\frac{104}{7}$

Q4 : $0 < i < i+j$ donc, en divisant par $i+j$ qui est supérieur à 0, on obtient : $0 < \frac{i}{i+j} < 1$

De plus $i > 0$ donc $j < i+j$. En divisant par j qui est supérieur à 0, on obtient : $1 < \frac{i+j}{j}$

Le fils gauche est inférieur à 1 et le fils droit est supérieur à 1.

Autre méthode : $\frac{i+j}{j} = \frac{i}{j} + \frac{j}{j} = \frac{i}{j} + 1 > 1$ et $\frac{i}{i+j} = \frac{i+j-j}{i+j} = \frac{i+j}{i+j} - \frac{j}{i+j} = 1 - \frac{j}{i+j} < 1$

Partie B - Arbre et suite de Calkin-Wilf

Q1 : Il y a huit fractions : $\frac{1}{4}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{1}$

Q2 : $\frac{31}{13}$ a pour fils droit $\frac{44}{13}$; $\frac{18}{13}$ a pour fils droit $\frac{31}{13}$; $\frac{5}{13}$ a pour fils droit $\frac{18}{13}$
 $\frac{5}{8}$ a pour fils gauche $\frac{5}{13}$; $\frac{5}{3}$ a pour fils gauche $\frac{5}{8}$.

Comme $\frac{5}{3}$ est sur la ligne 4, on en déduit que $\frac{44}{13}$ est bien dans l'arbre.

Plus précisément, $\frac{5}{8}$ est sur la ligne 5, $\frac{5}{13}$ est sur la ligne 6, $\frac{18}{13}$ est sur la ligne 7, $\frac{31}{13}$ est sur la ligne 8, et $\frac{44}{13}$ est sur la ligne 9.

Q3 : Il y 8 nombres sur la ligne 4 donc $u_{7+8} = u_{15}$ est le dernier nombre de la ligne 4.

Il y $8 \times 2 = 16$ nombres sur la ligne 5 (car chaque fraction a deux fils) donc $u_{15+16} = u_{31}$ est le dernier nombre de la ligne 6.

Par conséquent u_{32} est le premier nombre de la ligne 7. u_{32} est donc le fils gauche de u_{16} .

u_{16} est le fils gauche de u_8 qui est lui même le fils gauche de u_4 .

Ainsi : $u_8 = \frac{1}{4}$; $u_{16} = \frac{1}{5}$ et $u_{32} = \frac{1}{6}$

Q4 : Les deux fils de u_6 sont u_{12} et u_{13} . Les deux fils de u_n sont u_{2n} et u_{2n+1} .

Partie C - Suite de Stern

Q5 : $v_8 = 1$; $v_9 = 4$; $v_{10} = 3$; $v_{11} = 5$; $v_{12} = 2$; $v_{13} = 5$; $v_{14} = 3$; $v_{15} = 4$

Q6 : D'une part, le fils gauche de u_n est $\frac{v_n}{v_n + v_{n+1}}$ (voir définition de la partie A).

D'autre part, d'après la réponse à la question 4) de la partie B, le fils gauche de u_n est $u_{2n} = \frac{v_{2n}}{v_{2n+1}}$.

Ainsi $v_{2n} = v_n$ et $v_{2n+1} = v_n + v_{n+1}$.

Q7 : Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $v_n = v_{2n}$

Donc : $v_1 = v_2 = v_4 = v_8 = v_{16} = v_{32} = v_{64}$ donc $v_{64} = 1$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $v_{2n+1} = v_n + v_{n+1}$.

Donc : $v_{32} + v_{33} = v_{65}$ donc $v_{65} = 1 + v_{33}$ or $v_{16} + v_{17} = v_{33}$ donc $v_{33} = 1 + v_{17}$ or $v_8 + v_9 = v_{17}$ donc $v_{17} = 1 + 4 = 5$.

Ainsi $v_{33} = 1 + v_{17} = 1 + 5 = 6$; $v_{65} = 1 + v_{33} = 1 + 6 = 7$.

```

from math import *

def fg(x): # x de la forme (i,j), calcule le fils gauche de x
    (i,j) = x
    return (i,i+j)

def fd(x): # x de la forme (i,j), calcule le fils droit de x
    (i,j) = x
    return (i+j,j)

def nouvel_étage(L): # à partir d'un étage de l'arbre, calcule l'étage suivant
    nL = []
    for x in L:
        nL.append(fg(x))
        nL.append(fd(x))
    return nL

def arbre(nb_étage): # nb_étage > 0, construit les n premiers étages de l'arbre
    A = [(1,1)]
    for i in range(1,nb_étage):
        A.append(nouvel_étage(A[i-1]))
    return A

def u(n): # n > 0, suite de Calkin-Wilf
    nb_étage = int(log(n,2)) + 1
    A = arbre(nb_étage)
    L = []
    for X in A:
        L = L + X
    return L[n-1]

def v(n): # n > 0, suite de Stern
    (i,j) = u(n)
    return i

```

"""

EXEMPLES D'UTILISATION

```

>>> fg((3,5))
(3, 8)
>>> fd((3,5))
(8, 5)
>>> arbre(4)
[(1, 1)],
[(1, 2), (2, 1)],
[(1, 3), (3, 2), (2, 3), (3, 1)],
[(1, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 2), (2, 5), (5, 3), (3, 4), (4, 1)]
>>> u(10)
(3, 5)
>>> v(10)
3
"""

```

Corrigé de l'exercice 2 : Parcours gagnants!

Q1 : On a $3 \times 3 \times 3 = 27$ parcours possibles de Max.

Q2 : On en a 5 : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}), (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}), (\vec{u}, \vec{w}, \vec{u}), (\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}), (\vec{u}, \vec{w}, \vec{w})$.

Q3 : On en a 7 : $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{v}), (\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}), (\vec{v}, \vec{v}, \vec{u}), (\vec{v}, \vec{v}, \vec{v}), (\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}), (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}), (\vec{v}, \vec{w}, \vec{v})$.

Q4 : De manière analogue à la question 2, il y a 5 parcours gagnants de Max dont le premier vecteur de la liste est $\vec{w}$. Ainsi on a $5 + 7 + 5 = 17$ parcours gagnants parmi 27 parcours possibles.

Partie B - Une simulation

Ligne 11 : $y = y - 1$

Ligne 12 : if $y > 1$ or $y < -1$:

Partie C - Calculs de proche en proche

Q5 : $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ et $T_1 = 3$.

Q6 : (a) Il y a deux manières d'obtenir un parcours gagnant arrivant au point $(n+1; 1)$: soit avec un parcours gagnant arrivant au point $(n; 1)$ suivi de la translation de vecteur $\vec{v}$; soit avec un parcours gagnant arrivant au point $(n; 0)$ suivi de la translation de vecteur $\vec{u}$. Ainsi on obtient la relation $a_{n+1} = a_n + b_n$.

(b) Il y a trois manières d'obtenir un parcours gagnant arrivant au point $(n+1; 0)$: soit avec un parcours gagnant arrivant au point $(n; 1)$ suivi de la translation de vecteur $\vec{w}$; soit avec un parcours gagnant arrivant au point $(n; 0)$ suivi de la translation de vecteur $\vec{v}$; soit avec un parcours gagnant arrivant au point $(n; -1)$ suivi de la translation de vecteur $\vec{u}$. Ainsi on obtient la relation $b_{n+1} = a_n + b_n + c_n = 2a_n + b_n$.

(c) $T_{n+2} = 2a_{n+2} + b_{n+2}$

$$T_{n+2} = 2(a_{n+1} + b_{n+1}) + (2a_{n+1} + b_{n+1})$$

$$T_{n+2} = 4a_{n+1} + 3b_{n+1} \text{ où } 4a_{n+1} + 2b_{n+1} = 2(2a_{n+1} + b_{n+1}) = 2T_{n+1} \text{ et } b_{n+1} = 2a_n + b_n = T_n$$

Ainsi on obtient bien $T_{n+2} = 2T_{n+1} + T_n$.

Q7 :

n	1	2	3	4	5
a_n	1	2	5	12	29
b_n	1	3	7	17	41
T_n	3	7	17	41	99

Q8 : Pour $n = 5$, on a $3^5 = 243$ parcours possibles dont 99 qui sont gagnants. Ainsi la probabilité qu'un parcours de Max soit gagnant est égale à $\frac{99}{243} = \frac{11}{27}$.

Partie D - Expression explicite

Q9 : On se ramène à l'équation du second degré $x^2 - 2x - 1 = 0$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$$

Comme $\Delta > 0$, on en déduit que cette équation admet deux solutions réelles qui sont $x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times 1} = 1 - \sqrt{2}$

$$\text{et } x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times 1} = 1 + \sqrt{2}.$$

Q10 : (a) D'après le tableau de la question C.3, on a $T_1 = 3$.

$$u_1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}x_2$$

$$u_1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{2}) + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{2})$$

$$u_1 = \frac{1}{2}[(1 - \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2]$$

$$u_1 = \frac{1}{2}[(1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 + 2\sqrt{2} + 2)]$$

$$u_1 = 3$$

Ainsi on a bien $u_1 = T_1$.

(b) Soit n un entier naturel non nul, on a :

$$u_{n+2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}x_1^{n+2} + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}x_2^{n+2}$$

$$u_{n+2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}x_1^n x_1^2 + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}x_2^n x_2^2$$

$$u_{n+2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}x_1^n(2x_1 + 1) + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}x_2^n(2x_2 + 1)$$

$$u_{n+2} = 2\frac{1 - \sqrt{2}}{2}x_1^{n+1} + \frac{1 - \sqrt{2}}{2}x_1^n + 2\frac{1 + \sqrt{2}}{2}x_2^{n+1} + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}x_2^n$$

$$u_{n+2} = 2\left[\frac{1 - \sqrt{2}}{2}x_1^{n+1} + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}x_2^{n+1}\right] + \left[\frac{1 - \sqrt{2}}{2}x_1^n + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}x_2^n\right]$$

On obtient bien finalement :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$$

(c) D'après les deux questions précédentes, on en déduit que les suites (T_n) et (u_n) sont égales car elles ont les mêmes premiers termes de rang 1 et 2, et vérifient la même relation de récurrence.

Pour tout entier naturel n non nul, on a donc :

$$T_n = u_n$$

$$T_n = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}x_1^n + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}x_2^n$$

$$T_n = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{2})^n + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{2})^n$$

$$T_n = \frac{(1 - \sqrt{2})^{n+1} + (1 + \sqrt{2})^{n+1}}{2}$$

(d) La probabilité p_n qu'un parcours de Tom de taille n soit gagnant est :

$$p_n = \frac{T_n}{3^n}$$

$$p_n = \frac{(1 - \sqrt{2})^{n+1} + (1 + \sqrt{2})^{n+1}}{2 \times 3^n}$$

Corrigé de l'exercice 3 : Pavages en or

Pavages en or

Q1 : $P(1) = 1$ et $P(2) = 2$

Q2 : cf annexe

Q3 : a) • Si la dernière colonne comporte une brique verticale, il reste les $n + 2 - 1$ colonnes précédentes à paver ce qui correspond à $P(n + 1)$ possibilités.
 • Si la dernière colonne comporte une brique horizontale alors il y a en-dessous ou au-dessus d'elle une autre brique horizontale. Il reste ainsi les $n + 2 - 2$ colonnes précédentes à paver ce qui correspond à $P(n)$ possibilités.
 • Donc, au total, on a $P(n + 2) = P(n + 1) + P(n)$

b) $P(4) = P(2 + 2) = P(3) + P(2) = 3 + 2 = 5$

$P(5) = P(3 + 2) = P(4) + P(3) = 5 + 3 = 8$

Q4 : a) Ligne 2 : $p_1=1$
 Ligne 3 : $p_2=2$
 Ligne 5 : $p=p_1+q_1$

b) $P(10) = 89$

Partie B - Le nombre d'or s'y cache

Q5 : a) $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ est équivalent à $1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ et donc $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.

On a donc en multipliant par ϕ , $\phi^2 = \phi + 1$ et ϕ solution de $x^2 - x - 1 = 0$

b) On a $\Delta = 1 + 4 = 5$ et $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$ car $\phi > 0$.

Q6 : a)

n	1	2	3	4	5	10	15	20
$P(n)$	1	2	3	5	8	89	987	10946
F_n	1,2	1,9	3,1	4,96	8,0	89,0	987,0	10946,0

b) F_n donne la même valeur arrondie à l'entier que $P(n)$

Partie C - Pavage d'une grille de hauteur 3 carreaux

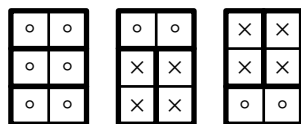
On considère dans cette partie une grille de largeur n carreaux et de hauteur 3 carreaux.

On souhaite réaliser un pavage formé des mêmes briques rectangulaires utilisées dans la partie A.

Q7 : Une brique est constituée de 2 carreaux donc un pavage comporte nécessairement un nombre pair de briques au total.

Une grille de largeur 3 carreaux comporte 9 carreaux au total d'où une impossibilité.

Q8 : Il faut que n soit être un nombre pair.

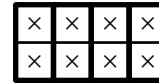
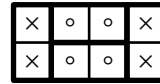
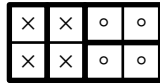
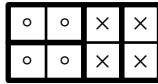
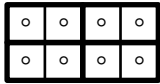
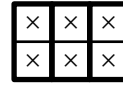
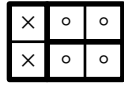
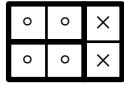


Q9 : Il y a 3 pavages possibles :

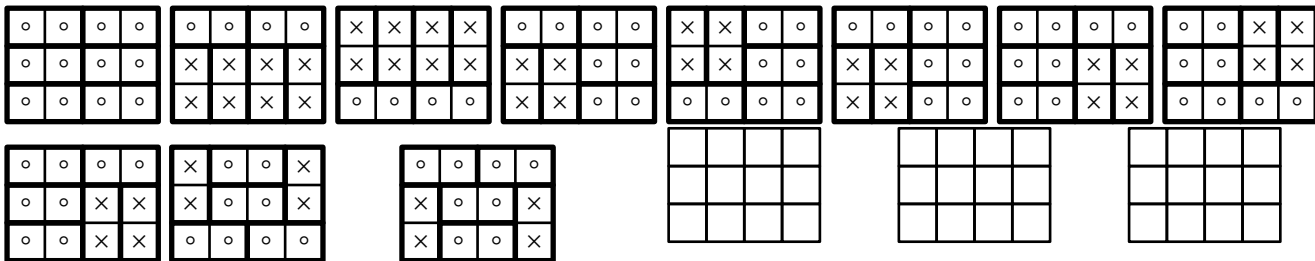
Q10 : Cf annexe (il y a 11 pavages car $P(k + 1) = 4P(k) - P(k - 1)$ avec $n = 2k$)

Annexe - Pavages en or - Correction

Annexe A2 (Partie A)



Annexe C (Partie C)



Corrigé de l'exercice 4 : L'île aux pixels

Partie A - Un codage binaire

Q1 : Pour l'île n° 2 : 1 1000 1 1000 10 1000
Pour l'île n° 3 : 1000 1 100 1000 1 100

Q2 : Voir annexe corrigée.

Q3 : (a) Voir figure corrigée.
(b) L'île semble réduite à un seul pixel.

Partie B - Quelques propriétés du code

Q1 : Le premier chiffre est toujours 1 (déplacement vers un pixel coloré). Le dernier chiffre est toujours 0 (retour au bateau).

Q2 : (a) Voir figure corrigée.
(b) La suite 1 1 1 1 créerait une boucle infinie, empêchant le retour au bateau.

Q3 : Le code 1 0 0 0 inverse la direction du robot. Voir figure corrigée.

Partie C - Une forme d'île problématique

Q1 : Codes obtenus :

- Code 1 : 1 0 0 0 1 0 0 0
- Code 2 : 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0
- Code 3 : 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0
- Code 4 : 1 0 0 0 1 0 0 0

Q2 : Non, pour certaines directions de départ, le robot ne parcourt pas tous les pixels du contour.

Partie A - Les tout-petits ploutons

- Q1 : Les quatre premiers nombres ploutons classés dans l'ordre croissant sont 2, 4, 6 et 12.
- Q2 : On considère un nombre premier p avec $p > 2$. $d(p) = d(2) = 2$. Le nombre de diviseurs de p est égal au nombre de diviseurs de 2 donc p n'est pas un nombre plouton.
- Q3 : Le plus petit nombre plouton strictement supérieur à 12 est 24.
- Q4 : (a) Les diviseurs positifs de 2^k sont $1, 2, 2^2, \dots, 2^k$ d'où $d(2^k) = k + 1$.
 (b) D'après la question précédente, le nombre 2^k admet $d(2^k) = k + 1$ diviseurs positifs et admet donc plus de diviseurs que N. Or si N est le plus grand nombre plouton, aucun nombre ne peut avoir plus de diviseurs que lui. Ainsi il y a contradiction.
 (c) D'après la question précédente, il existe donc une infinité de nombres ploutons.

Partie B - Les ploutons inférieurs ou égaux à 200

Q1 : Décompositions :

$$2 = 2^1 \times 3^0 \times 5^0$$

$$4 = 2^2 \times 3^0 \times 5^0$$

$$6 = 2^1 \times 3^1 \times 5^0$$

$$12 = 2^2 \times 3^1 \times 5^0$$

Q2 : Non, par exemple $n = 3 = 2^0 \times 3^1 \times 5^0$ n'est pas un nombre plouton.

Q3 : Diviseurs de 60 :

$$1 = 2^0 \times 3^0 \times 5^0$$

$$2 = 2^1 \times 3^0 \times 5^0$$

$$3 = 2^0 \times 3^1 \times 5^0$$

$$4 = 2^2 \times 3^0 \times 5^0$$

$$5 = 2^0 \times 3^0 \times 5^1$$

$$6 = 2^1 \times 3^1 \times 5^0$$

$$10 = 2^1 \times 3^0 \times 5^1$$

$$12 = 2^2 \times 3^1 \times 5^0$$

$$15 = 2^0 \times 3^1 \times 5^1$$

$$20 = 2^2 \times 3^0 \times 5^1$$

$$30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$$

$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$$

Q4 : Non, par exemple $n = 7$ n'admet pas une telle décomposition.

Q5 : Un diviseur positif de $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$ correspond à une liste (α, β, γ) telle que $0 \leq \alpha \leq a$, $0 \leq \beta \leq b$ et $0 \leq \gamma \leq c$. On a donc $(a + 1) \times (b + 1) \times (c + 1)$ diviseurs.

Q6 : (a) Si $a < b$, on peut construire un nombre $n' = 2^b \times 3^a \times 5^c$ avec $n' < n$ et $d(n') = d(n)$, ce qui contredit la définition d'un nombre plouton.

(b) $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$ vérifie $a \geq b \geq c$ mais n'est pas un nombre plouton car $d(30) = d(24) = 8$.

Q7 : Tableau complété (voir annexe).

Q8 : Les dix nombres ploutons inférieurs à 200 sont : 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180.

Partie A - Les solides de Platon

Nom du polyèdre	Nombre de faces (F)	Nombre de sommets (S)	Nombre d'arêtes (A)	F + S - A	Nature de la face
Tétraèdre	4	4	6	2	triangle équilatéral
Cube	6	8	12	2	carré
Octaèdre	8	6	12	2	triangle équilatéral
Dodécaèdre	12	20	30	2	pentagone régulier
Icosaèdre	20	12	30	2	triangle équilatéral

Partie B - Angles et faces

Par exemple :

- une face d'un tétraèdre régulier est un triangle équilatéral ;
- une face d'un cube est un carré ;
- une face d'un dodécaèdre régulier est un pentagone régulier.

Face d'un tétraèdre régulier

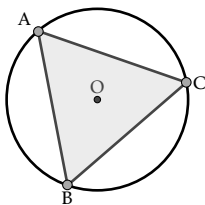


Figure 1

Face d'un cube

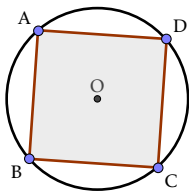


Figure 2

Face d'un dodécaèdre régulier

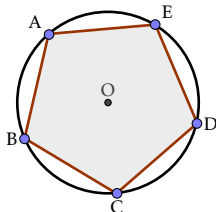


Figure 3

Dans la suite du problème, on choisira de donner les mesures des angles demandées en degrés (°).

Q1 : Rappeler, sans justifier, une mesure de l'angle géométrique :

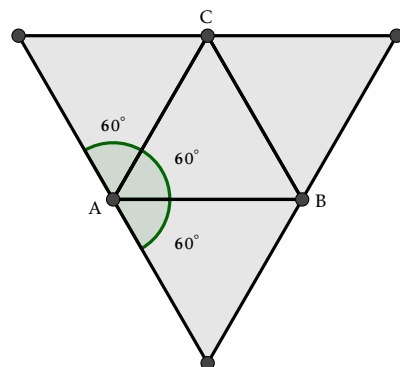
- (a) $\widehat{BAC} = 60^\circ$
- (b) $\widehat{BAD} = 90^\circ$

Q2 : Le pentagone ayant 5 côtés, l'angle $\widehat{AOE}$ mesure $360^\circ : 5 = 72^\circ$. AOE étant isocèle en O, $\widehat{OAE}$ mesure $(180^\circ - 72^\circ) : 2 = 54^\circ$. (AO) étant la bissectrice de l'angle $\widehat{BAE}$, celui-ci a pour mesure $2 \times 54^\circ = 108^\circ$

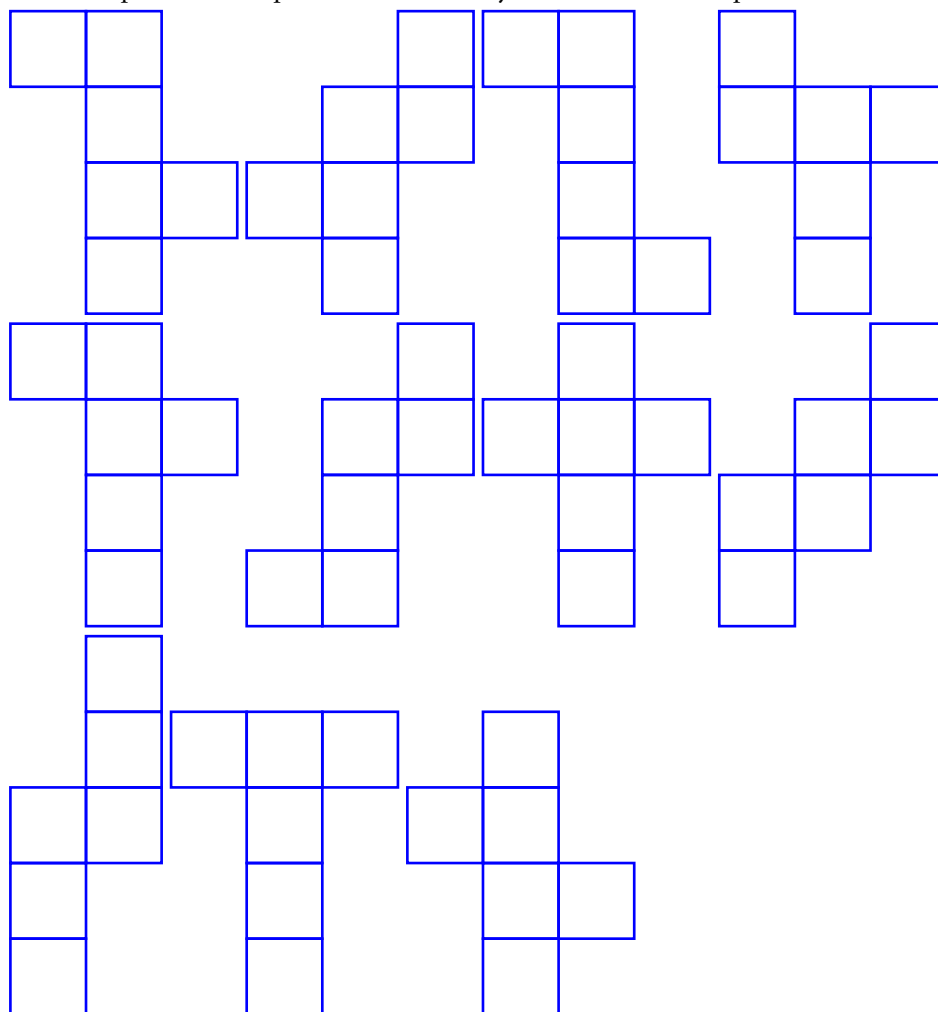
Pour évaluer la **rotondité** d'un polyèdre (le fait que le polyèdre se rapproche plus ou moins d'une sphère), les ingénieurs décident de calculer la somme des angles vus d'un des sommets du polyèdre, en se disant que plus cette somme est proche de 360° , plus le polyèdre sera «rond».

On admet que la rotondité d'un solide évoqué dans ce sujet est la même en chaque sommet.

Par exemple pour le tétraèdre régulier, on trouve comme rotondité 180° en se reportant au patron et en effectuant la somme des trois angles de sommet A, des trois triangles équilatéraux (voir figure ci-contre).



Q1 : (a) À choisir parmi les 11 patrons de cube à symétrie ou rotation près :



(b) $3 \times 90^\circ = 270^\circ$ La rotondité du cube est de 270° .

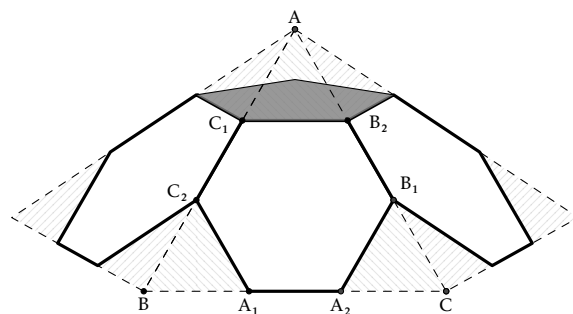
Nom du polyèdre	Nom du polygone (face)	Nombres de polygones réguliers partant d'un sommet du polyèdre	Angle formé par 2 côtés du polygone	Somme des angles des polygones vus d'un sommet du polyèdre
Tétraèdre	triangle équilatéral	3	60°	$3 \times 60^\circ = 180^\circ$
Cube	carré	3	90°	270°
Octaèdre	triangle équilatéral	4	60°	240°
Dodécaèdre	pentagone régulier	3	108°	324°
Icosaèdre	triangle équilatéral	5	60°	300°

Q3 : Les ingénieurs auraient dû proposer le dodécaèdre qui a une rotondité de 324°.

Partie D - Retour au ballon de football

Les ingénieurs décident d'améliorer la rotondité de l'icosaèdre, en lui apportant des modifications. Ils procèdent de la manière suivante :

- ▷ Chaque côté d'une face triangulaire est découpé en trois segments de même longueur. Par exemple, sur la figure ci-contre, le côté $[AB]$ de la face ABC est découpé en trois segments $[AC_1]$, $[C_1C_2]$ et $[C_2B]$ de même longueur. La même chose est réalisée pour les deux autres côtés $[AC]$ et $[BC]$ et les triangles AC_1B_2 , BA_1C_2 et CB_1A_2 sont enlevés.
- ▷ L'hexagone régulier $C_1C_2A_1A_2B_1B_2$ ainsi obtenu forme une face du nouveau solide.
- ▷ Et les bases des 5 triangles enlevés de sommet A forment un pentagone régulier (en gris sur la figure) et constitue une nouvelle face du solide.
- ▷ Sur la figure ci-contre les hachures représentent les faces retirées et, en gris foncé, un des pentagones.



Q1 : À partir de C_1 on voit 2 hexagones et 1 pentagone.

Q2 : Les 2 hexagones et le pentagone donnent donc une rotondité de $2 \times 120^\circ + 108^\circ = 348^\circ$

Q3 : Oui car $348^\circ > 324^\circ$

Q4 : L'icosaèdre régulier a 12 sommets qui produiront donc 12 pentagones et a 20 faces qui deviendront 20 hexagones donc ce solide a 32 faces.

De chaque sommet partent 3 faces. Donc on doit diviser le nombre total de sommets de chaque type de face par 3 : $(12 \times 5 + 20 \times 6) : 3 = 180 : 3 = 60$. Le solide a 60 sommets.

De chaque arête partent 2 faces. Donc on doit diviser le nombre total d'arêtes de chaque type de face par 2 : $(12 \times 5 + 20 \times 6) : 2 = 180 : 2 = 90$. Le solide a 90 arêtes.

Q5 : $F + S - A = 32 + 60 - 90 = 2$.