Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Maroc juin 1970 ∽

EXERCICE 1 **points**

Soit $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels.

1. Montrer que la relation
$$(y \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad 3y^2 \in \mathbb{Z})$$
implique la relation $y \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que la relation
$$(x \in \mathbb{Z} \quad \text{et } y \in \mathbb{Q} \quad \text{et } x^2 - 3y^2 \in \mathbb{Z})$$
implique la relation $y \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que la relation
$$(x \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x \equiv 1 \mod 2)$$
implique la congruence $x^2 \equiv 1 \mod 4$.
4. Montrer que la relation
$$(x \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x \equiv 1 \text{ mod } 2)$$
implique
$$x^2 - 3y^2 \neq 0 \text{ mod } 4.$$

EXERCICE 2 **points**

Dans un plan (P) un repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ est donné.
À tout point M, de coordonnées $(x ; y)$, on associe le point M', de coordonnées $\left(x' ; y'\right)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& 3x - 2y,\\ y' &=& 4x - 3y.\end{array}\right.$$

Déterminer l'ensemble (E) des points M confondus avec leurs images M'.
Quand M n'appartient pas à (E), la droite MM' et (E) ont un point commun m. Comparer $\overrightarrow{mM}$ et $\overrightarrow{mM'}$; reconnaître la transformation qui à M associe M'.

PROBLÈME **points**

Partie A

Soit $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\text{e}^x + \text{e}^{-x}}{2},$$

où e désigne la base des logarithmes népériens.

1. Déterminer la fonction f' dérivée de la fonction f. Soit f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.
   Montrer que
   $$f'' = f.$$
2. Montrer que la fonction f est paire, c'est-à-dire que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(-x).$$
   Étudier les variations de la fonction f et construire son graphe $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.
On suppose connu le graphe $\left(\gamma_0\right)$ de la fonction
$$x \longmapsto \text{e}^x$$

1. Soit (γ) la courbe d'équation $y = \text{e}^{x-1}$ et (γ') la courbe d'équation $y = \text{e}^{-x-1}$.
   Montrer que (γ) et (γ') se déduisent de $\left(\gamma_0\right)$ par des transformations ponctuelles simples, que l'on précisera.
   Déterminer les graphes de $\left(\gamma_0\right)$, (γ) et (γ') dans le même repère que $(\mathscr{C})$.
2. Soit P un point de l'axe $x'\text{O}x$ d'abscisse donnée m. Déterminer en fonction de m les équations des droites (Δ) et (Δ') respectivement tangentes à (γ) et (γ') et qui passent par le point P.
   Préciser les coordonnées des points de contact T et T$'$.
   Comparer les directions de (Δ) et (Δ').
3. Trouver, lorsque m décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points I milieux de TT$'$. Montrer que la droite TT$'$ est tangente à la courbe ensemble des points I.
4. Déduire des résultats précédents une construction géométrique de la tangente en un point donné I de la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie C

On considère un mobile dont la trajectoire est la courbe $(\mathscr{C})$ et dont les coordonnées sont données en fonction du temps par
$$\left\{\begin{array}{l c l}x(t) &=& t,\\ y(t) &=& \dfrac{\text{e}^t + \text{e}^{-t}}{2}\end{array}\right. \qquad t \in [0\ ;\ +\infty[.$$
Soit $M(t)$ le point de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.

1. Déterminer les composantes scalaires du vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ et du vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma}(t)$ à l'instant t. Comparer les modules de ces deux vecteurs avec l'ordonnée du point $M(t)$.
2. La trajectoire est supposée orientée de façon que le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ ait une mesure algébrique $v(t)$ positive. Soit $s(t)$ la mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{M(0)M(t)}$ de la courbe $(\mathscr{C})$. On rappelle alors que
   $$\frac{\text{d}s}{\text{d}t} = \sqrt{\left(\frac{\text{d}x}{\text{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\text{d}y}{\text{d}t}\right)^2}.$$
   Soit $S(t)$ l'aire de la surface limitée par $(\mathscr{C})$, les axes de coordonnées et la parallèle menée par $M(t)$ à $y'\text{O}y$.
   Évaluer $s(t)$ et $S(t)$ en fonction de t.