Baccalauréat C Maroc juin 1973

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 + 2(\mathrm{i} - 1)z^2 - 3\mathrm{i}z + \mathrm{i} + 1 = 0.$$

(Donner les racines sous la forme $a + \mathrm{i}b$, avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Remarquer une racine évidente).
Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé, montrer que les points ayant pour affixes les racines de cette équation, sont les sommets d'un triangle rectangle.

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} f(x) & = & \mathrm{Log}\, x & \text{si} & x \geqslant \mathrm{e}^2 \\ f(x) & = & ax + b & \text{si} & x < \mathrm{e}^2 \end{array}\right.$$

où a et b sont des nombres réels.

1. Déterminer a et b pour que la fonction f soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose maintenant $a = \mathrm{e}^{-2}$ et $b = 1$.
   Étudier les variations de la fonction f, et la représenter graphiquement dans un repère orthonormé.
3. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}, définie sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout nombre réel y, expliciter l'expression de $x = f^{-1}(y)$, en fonction de y, (distinguer selon les valeurs de y).
   Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable, et donner l'expression de sa dérivée au point y, en fonction de y.

PROBLÈME

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}$ des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, muni de l'addition :

$$f + g\,:\, x \longmapsto f(x) + g(x) \text{ pour tout } (f,\ g) \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}$$

et de la multiplication externe par les nombres réels :

$$\lambda f\,:\, x \longmapsto \lambda f(x) \text{ pour tout } (\lambda,\ f) \in \mathbb{R} \times \mathscr{F}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soient A, B, C, les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$A(x) = x\mathrm{e}^x, \quad B(x) = \mathrm{e}^x, \quad C(x) = \mathrm{e}^{-x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ engendré par A, B, C, c'est-à-dire l'espace vectoriel des fonctions f, de la forme $f = aA + bB + cC$ où a, b, c sont des nombres réels quelconques.

1. Montrer que toute fonction f appartenant à E est dérivable, et que sa dérivée appartient à E.

Soient α, β, γ des nombres réels. Déterminer les fonctions $f \in$ E telles que $f(0) = \alpha$, $f'(0) = \beta, f''(0) = \gamma$.

En déduire que les fonctions A, B, C, sont linéairement indépendantes. Quelle est la dimension de E ?

2. Pour tout nombre réel λ, soit f_λ la fonction : $f_\lambda(x) = x\text{e}^x + \lambda\text{e}^{-x}$. Étudier, selon les valeurs de λ, les limites à l'infini de la fonction f_λ ainsi que de la fonction $x \longmapsto f_\lambda(x)$. (Distinguer $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$).

Étudier les variations de la fonction f_0 et tracer sa courbe représentative.

Quelles sont les variations de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2\text{e}^2} f_0(2(x+1))?$$

En s'aidant de la fonction g, étudier les variations de la fonction f_λ selon les valeurs de λ. Tracer la courbe représentative de la fonction f_λ pour $\lambda = -\dfrac{1}{2\text{e}^3}$ et pour $\lambda = 1$.

3. Montrer que l'application D de E dans E, définie par $D(f) = f'$, pour toute fEE, est une application linéaire bijective. Déterminer les coefficients réels a, b, c de façon que la fonction $f = aA + bB + cC$ ait pour dérivée une fonction donnée $h = rA + sB + tC$, appartenant à E.

4. Montrer que si $ac = 0$, la fonction $f = aA + bB + cC$, et les fonctions f' et f'', sont linéairement indépendantes. Exprimer dans ce cas f''' comme combinaison linéaire de f, f', f'', et vérifier que la relation ainsi obtenue entre f, f', f'' et f''', reste valable pour toute $f \in$ E.