Baccalauréat C Maroc juin 1968

EXERCICE I

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox,\ y'Oy$, on considère les coniques d'équation

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Étudier, suivant les valeurs de q, la nature de ces coniques.
Préciser, dans chaque cas, l'excentricité.

EXERCICE II

Soit $\mathbb{C}$ le corps des complexes, $\mathbb{C}_1$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ des nombres complexes différents de 1.
Soit f l'application de $\mathbb{C}_1$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(Z) = \frac{Z+1}{\overline{Z}-1},$$

où $\overline{Z}$ est le conjugué du nombre complexe Z.
Soit $M(Z)$ l'image du nombre complexe Z dans le plan complexe d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

1. Déterminer l'ensemble, $\mathscr{M}_1$, des points $M(Z)$ tels que $f(Z)$ soit réel.
2. Déterminer l'ensemble, $\mathscr{M}_1$, des points $M(Z)$ tels que $f(Z)$ soit imaginaire pur.

PROBLÈME

Partie A

Soit la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)^2}.$$

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative en repère orthonormé.
2. Déterminer les constantes a, b, c, telles que abc

$$f(t) = \frac{a}{(t+1)^2} + \frac{b}{(t+1)} + \frac{c}{t}, \quad \text{si} \quad t \neq -1 \text{ et } t \neq 0.$$

3. Calculer alors

$$A(x,\ y) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{avec} \quad 0 < x < y.$$

   Donner l'interprétation géométrique de $A(x,\ y)$.

Partie B

On considère, en plus, la fonction g définie par

$$g(t) = \frac{-1}{t^2(t+1)}.$$

1. Déterminer les primitives de $g(t) - f(t)$.

2. En déduire

$$B(x,\ y) = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{avec} \quad 0 < x < y.$$

3. En supposant x fixé, positif, déterminer, lorsque y tend vers $+\infty$, les limites de $A(x,\ y)$ et $B(x,\ y)$, nommées respectivement $F(x)$ et $G(x)$.

Partie C

En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction « logarithme népérien de »,

1. montrer que $G(x) < 0 < F(x)$, x étant positif ;
2. en déduire que, pour $x > 0$, on a

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1};$$

3. n étant un entier naturel non nul, établir que l'on a e 1

$$1 < \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

En déduire la limite de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.