Baccalauréat C Maroc juin 1974

EXERCICE 1

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la notation $\dot{n}$ désigne la classe de n dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Trouver tous les couples $(a\ ;\ b)$ d'éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ tels que l'on ait

$$\dot{a}\dot{b} = \dot{0} \quad \text{et} \quad \dot{a} - \dot{b} = \dot{5}.$$

2. Résoudre l'équation $x^2 + \dot{3}x - \dot{4} = \dot{0}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
3. Déterminer les entiers naturels x, tels que le nombre entier N qui s'écrit $\overline{138}$ en base x, soit divisible par 12.

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & |x\text{Log}\,x - x| \quad \text{si } x \in]0\ ;\ +\infty[\\ f(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

1. La fonction f est-elle continue à droite en 0 ? Est-elle dérivable à droite en 0 ? Est-elle dérivable au point $x = \text{e}$?
2. Étudier les variations de la fonction f, et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant 2 cm (sur chacun des axes).
3. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[\text{e}\ ;\ +\infty[$ admet une fonction réciproque g. Préciser le domaine de définition D_g de g.
   La fonction g est-elle dérivable sur D_g ?
4. Calculer $f\left(\text{e}^3\right)$ et $g'\left(2\text{e}^3\right)$.

PROBLÈME

On considère l'ensemble $\mathcal{M}$, des matrices M de la forme $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$, où a et b décrivent l'ensemble des nombres réels.
Soit $\text{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\text{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels.
   b. Montrer que $\{\text{I},\ \text{A}\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$.
   c. Montrer que $\mathcal{M}$ muni de l'addition, et de la multiplication des matrices, est un anneau unitaire. Est-ce un corps ? Montrer que si une matrice $M \in \mathcal{M}$, est inversible dans l'anneau des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels, alors M^{-1} appartient à $\mathcal{M}$. Que peut-on dire de l'ensemble $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$, des matrices $M \in \mathcal{M}$ à coefficients rationnels ?
2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2, et soit $\left(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E, représenté dans la base $\left(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$ par la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$.
   Déterminer, suivant les valeurs de a et b, l'image de f, et le noyau de f, notés respectivement $\text{Im}\,f$ et $\text{Ker}\,f$.

3. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}$, vérifiant la relation $M \times M = M$.

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ représente dans E, relativement à la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, une projection vectorielle de direction D' sur une droite D. Déterminer les droites D et D'.

4. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}$, telle que $M \times M = \mathrm{I}$.

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ représente dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, une symétrie vectorielle de E, de direction Δ', par rapport à une droite Δ. Déterminer les droites Δ et Δ'.

5. Montrer que l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels, P, telles que $A \times P = P \times A$, est $\mathcal{M}$.

Montrer que si φ est un endomorphisme fixé de E, l'ensemble des endomorphismes g de E, tels que $g0\varphi = \varphi \circ g$, est un anneau unitaire, pour l'addition et la composition des endomorphismes.

Montrer que si φ et g sont des endomorphismes de E, tels que $g \circ \varphi = \varphi \circ g$, on a :

$$\begin{gathered} \mathrm{Im}(g \circ < p) \subset \mathrm{Im}\, g \cap \mathrm{Im}\, \varphi \\ \mathrm{Ker}\, g \cup \mathrm{Ker}\, \varphi \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ \varphi) \end{gathered}$$

(Im : image, Ker : noyau).