Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1975 Maroc

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \text{Log}\, x^2$ (Log : logarithme népérien).
Étudier la variation de f, tracer la courbe représentative C par rapport à un repère orthonormé.
Ecrire l'équation de la tangente à C au point d'abscisse e.
Aire du domaine limité par C, l'axe des x et la tangente à C au point d'abscisse e, et situé dans la région correspondant aux ordonnées positives.

EXERCICE 2

Soit P le plan affine rapporté au repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On considère l'application F de P dans P qui à $M(x\,;\ y)$ associe $M'\left(x'\,;\ y'\right)$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& -\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}y \\ y' &=& -\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}y \end{array}\right.$$

Déterminer la matrice de l'application linéaire associée φ.
Déterminer $\varphi\circ\varphi\circ\varphi$.
Soit $M' = F(M)$ et $M'' = F\left(M'\right)$.
Déterminer $\varphi\left(\overrightarrow{\text{O}M}M + \overrightarrow{\text{O}M'} + \overrightarrow{\text{O}M''}\right)$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\text{O}M}, \overrightarrow{\text{O}M'}, \overrightarrow{\text{O}M''}$.
Que peut-on déduire du résultat pour la somme $\overrightarrow{\text{O}M} + \overrightarrow{\text{O}M'} + \overrightarrow{\text{O}M''}$?
Quel est l'isobarycentre de M, M' et M'' ?

PROBLÈME

On désignera par $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables muni des lois de composition habituelles.
On se propose de trouver l'ensemble S des fonctions numériques f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(1)\qquad f''(x)+2f'(x)+f(x) = 4(2x-1)\text{e}^x + x^2 - 5,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

On remarquera que S est inclus dans $\mathscr{F}$.

Partie A

Soit E l'ensemble des fonctions numériques h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = (ax+b)\text{e}^x + cx\text{e}^{-x}$$

où a, b, c varient dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
   Pour n entier positif, montrer que la dérivée d'ordre n de h est définie par :

$$h^{(n)}(x) = [a(x+n)+b]\text{e}^x + (-1)^n c(x-n)\text{e}^{-x},\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

2. Soit h_1, h_2, h_3 les éléments de E définis par :

$$h_1(x) = x\mathrm{e}^x, \quad h_2(x) = \mathrm{e}^x, \quad h_3(x) = x\mathrm{e}^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\mathscr{B} = \{h_1, h_2, h_3\}$ est une base de E.

3. Soit ϕ l'application de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$ définie par :

$$\phi(f) = f'' + 2f' + f$$

et ϕ_1 sa restriction à E.

   a. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{F}$.
   Calculer $\phi_1(h)$ pour h appartenant à E ; en déduire que ϕ_1 est un endomorphisme de E.

   b. Déterminer le noyau $N\left(\phi_1\right)$ et l'image $\phi_1(E)$ de cet endomorphisme.

4. Montrer que l'application : $x \longmapsto 4(2x-1)\mathrm{e}^x$ appartient à $\phi_1(h)(E)$ et trouver alors un élément h_0 de E tel que

$$\phi_1\left(h_0\right)(x) = 4(2x-1)\mathrm{e}^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Partie B

1. Trouver une fonction polynôme p_0 du second degré telle que :

$$\phi\left(p_0\right)(x) = p_0''(x) + 2p_0'(x) + p_0(x) = x^2 - 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Montrer que $h_0 + p_0$ est un élément de S.

Partie C

On se propose de chercher l'ensemble S_0 noyau de l'application ϕ dans $\mathscr{F}$

1. Soit f appartenant à S_0 ; calculer la dérivée seconde de la fonction

$$g : x \longmapsto \mathrm{e}^x f(x).$$

2. Déterminer la forme générale de la fonction g. En déduire l'ensemble S_0.
3. Vérifier que f appartient à S si et seulement si $f - \left(h_0 + p_0\right)$ appartient à S_0.
   En déduire l'ensemble S des fonctions vérifiant (1).