

Durée : 4 heures

♣ Baccalauréat C Maroc juin 1976 ♣

EXERCICE 1

1. Vérifier que le couple (2 ; 3) est solution de :

$$41x - 27y = 1 \quad (x, y) \in \mathbb{N}^2$$

2. En déduire une solution particulière de :

$$41x - 27y = 5 \quad (x, y) \in \mathbb{N}^2$$

3. Donner toutes les solutions de :

$$41x - 27y = 5 \quad (x, y) \in \mathbb{N}^2$$

EXERCICE 2

1. Déterminer deux constantes réelles A et B telles que :

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}$$

Calculer alors :

$$J = \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)} dt$$

2. Calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$$

PROBLÈME

Les parties A et B peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

Partie A

1. a. Soit E un espace vectoriel et soit φ une application linéaire de E dans E telle que $\varphi \circ \varphi = \text{Id}$. (Id désignant l'application identique de E dans E). Montrer que φ est bijective. Soit :

$$E^+ = \{V \in E \mid \varphi(V) = +V\} \quad E^- = \{V \in E \mid \varphi(V) = -V\}$$

Montrer que E^+ et E^- sont deux sous-espaces vectoriels de E , et que $E^+ \cap E^- = \{0\}$.

Pour chaque $V \in E$, on pose :

$$V^+ = \frac{1}{2}(V + \varphi(V)) \quad V^- = \frac{1}{2}(V - \varphi(V))$$

Montrer que $V^+ \in E^+$ et que $V^- \in E^-$, et que $V = V^+ + V^-$. En déduire que E est somme directe des deux sous-espaces vectoriels E^+ et E^- .

- b. A chaque triplet (α, β, γ) de nombres réels, on associe l'application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = \alpha x + \beta e^x + \gamma e^{-x}$. On désigne par F_c l'ensemble de toutes les applications f obtenues quand α, β, γ parcourent \mathbb{R} . Montrer que F_c est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Prouver que l'ensemble des trois applications :

$$x \mapsto x \quad x \mapsto e^x \quad x \mapsto e^{-x}$$

constitue une base de F_c .

- c. Soit A l'application de F_c dans F_c qui à tout $f \in F_c$ associe $g = A(f)$ définie par $g(x) = f(-x)$. Montrer que $A \circ A = \text{Id}$. (Id désignant l'application identique de F_c dans F_c). On considère l'application f_0 de F_c définie par :

$$f_0(x) = e^x$$

f_0^+ et f_0^- sont définies comme dans I - 1. (E remplacé par F_c , et φ remplacé par A). Déterminer f_0^+ et f_0^- . Montrer que pour tout réel x , on a :

$$(f_0^+(x))^2 - (f_0^-(x))^2 = 1$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $z(t) \in \mathbb{C}$ le nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire sont respectivement $a f_0^+(t)$ et $b f_0^-(t)$, où a et b sont deux réels strictement positifs. Trouver une relation indépendante de t entre $\Re(z(t))$, la partie réelle de $z(t)$ et $\Im(z(t))$, la partie imaginaire de $z(t)$. Soit M_t le point d'affixe $z(t)$. Démontrer que M_t appartient à une conique, indépendante de t , dont on donnera une équation.

Partie B

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit H l'hyperbole admettant comme équation dans ce repère :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a et b désignent des nombres réels strictement positifs donnés.

On désigne par S le groupe des similitudes du plan P_c . On cherche dans cette partie à caractériser la partie E_c de S formée des similitudes s qui laissent H invariante (c'est à dire telles que $s(H) = H$).

On rappelle qu'une similitude est une bijection de P sur lui-même, qu'elle transforme une droite en une droite, et qu'elle multiplie les longueurs par une constante positive (rapport de similitude).

- Faire une représentation graphique de H en plaçant ses asymptotes.
- Soit $s \in S$. Montrer que O est point double pour s (c'est à dire que $s(O) = O$).
On pourra pour cela se servir de la caractérisation suivante du centre d'une hyperbole :
— Toute droite passant par le centre rencontre l'hyperbole en zéro ou deux points.
— Par tout point autre que le centre, il passe au moins une droite rencontrant l'hyperbole en un seul point.
- Soit A et A' les sommets de H (c'est à dire les deux points de H situés sur la droite Ox). On pose $B = s(A)$. Montrer que la distance des deux points O et B (notée $\|\overrightarrow{OB}\|$) est au moins égale à celle de O et A (notée $\|\overrightarrow{OA}\|$). En déduire que k , le rapport de similitude de s , est au moins égal à 1.
- Montrer que $k = 1$, et montrer que $s(A)$ est soit A , soit A' .
- En déduire que l'ensemble E_c est constitué par quatre éléments, qui sont :
— Id , l'application identique

- S_0 , la symétrie par rapport à l'origine
 - S_1 , la symétrie orthogonale par rapport à Ox
 - S_2 la symétrie orthogonale par rapport à Oy .
- Vérifier que E_c est un sous-groupe de S .