Baccalauréat C Maroc juin 1981

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$x^2 - 9y^2 = -35.$$

EXERCICE 2

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = z^3 + (5\text{i} - 1)z^2 + (-1 + 4\text{i})z + 3 + 7\text{i}.$$

1. Calculer $f(\text{i})$. En déduire une factorisation de $f(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

PROBLÈME

Soit $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbb{R}_+^\star$ le sous-ensemble des réels strictement positifs.
Soit f et g les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$f(t) = \frac{1}{t}\cos 2t \quad \text{et} \quad g(t) = -\sin 2t.$$

Partie A

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des combinaisons linéaires à coefficients réels de f et g, muni des lois d'addition des fonctions et de multiplication d'une fonction par un réel.

1. Vérifier que $(f,\ g)$ est une base de E.
2. Soit φ l'application de E $\times$ E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(u,\ v) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t^2 u(t) \cdot v(t)\,\text{d}t.$$

   a. Montrer que φ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.

   b. Montrer que la base $(f,\ g)$ est orthogonale pour le produit scalaire cp.

   c. Montrer qu'il existe un produit scalaire sur l'espace vectoriel E pour lequel la base $(f,\ g)$ est orthonormée.

Partie B

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit $t \in \mathbb{R}_+^\star$ et A_t l'application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ avec

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & f(t).x - g(t).y \\ y' & = & g(t).x + f(t).y. \end{array}\right.$$

1. Montrer que A_t est une similitude plane directe et en préciser ses éléments caractéristiques (centre, rapport, mesure de l'angle).
2. **a.** Déterminer l'ensemble des réels $t \in \mathbb{R}_+^\star$ tels que A_t soit une rotation.

b. Déterminer l'ensemble des réels $t \in \mathbb{R}_+^\star$ tels que A_t soit une homothétie.

3. Existe-t-il $t \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $A_{\frac{\pi}{8}} \circ A_t = A_1$?
(La loi $\circ$ étant la composition des applications.)

Partie C

1. Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle réel I $=]0 ; \pi]$ par

$$h(t) = \cos 2t + 2t \sin 2t.$$

a. Étudier les variations de h sur I.

b. Montrer que l'équation $h(t) = 0$ admet sur I exactement deux solutions, notées t_0 et t_0', $(t_0 < t_0')$; vérifier que 1t 1t -

$$\frac{\pi}{4} < t_0 < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3\pi}{4} < t_0' < \pi.$$

(On ne cherchera pas à calculer numériquement t_0 et t_0' mais on justifiera rigoureusement leur existence).

c. En déduire l'étude du signe de $h(t)$ lorsque t appartient à I.

2. a. Étudier la fonction f sur I (sens de variation, extremums, limites).

b. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^\star$ on a

$$-\frac{1}{t} \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{t}.$$

c. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^\star$ l'équation $f(t) = 0$.

3. Soit h_1 et h_2 les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$h_1(t) = -\frac{1}{t} \quad \text{et} \quad h_2(t) = \frac{1}{t}.$$

On appelle C, C_1, C_2 les courbes représentatives des fonctions f, h_1, h_2 dans un plan affine $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

a. Déterminer les points d'intersection de C et de C_1 et montrer qu'en ces points les deux courbes ont même tangente.

b. Déterminer les points d'intersection de C et de C_2 et montrer qu'en ces points les deux courbes ont même tangente.

c. Soit C', C_1' et C_2' les courbes représentatives des restrictions à I des fonctions f, h_1 et h_2.
Tracer dans un même repère orthonormé C', C_1' et C_2'.

d. En déduire sans justification le tracé des courbes C, C_1, C_2.

Partie D

Dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, M est un point mobile dont les coordonnées à la date t ($t \in \mathbb{R}_+^\star$) sont

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & f(t)\\ y & = & g(t)\end{array}\right.$$

1. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{V}$, vitesse de M, et $\overrightarrow{\Gamma}$ accélération de M à la date t. Vérifier que le mouvement de M est retardé sur $]0~;~+\infty[$.
2. **a.** Vérifier que l'application $t \longmapsto \left\|\overrightarrow{\mathrm{O}M}\right\|$ est strictement décroissante sur $]0~;~+\infty[$. Déterminer l'angle $\left(\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\mathrm{O}M}\right)$.

   b. Calculer

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} g(t)$$

   puis

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} g(t).$$

   c. Représenter approximativement dans $\mathscr{P}$ les positions de M aux instants $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, π et 2π. (On prendra $\pi \approx 3$).

   d. En déduire l'allure de la trajectoire de M sur $]0~;~+\infty[$.