Durée : 4 heures

Baccalauréat C Maroc juin 1982

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan affine euclidien E, on considère le triangle ABC isocèle rectangle en A tel que

$$\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\text{AC}}\right\| = 3a \quad (a \in \mathbb{R}_+^\star).$$

1. Déterminer le barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 4, - 3, 2. Construire ce point.
2. Soit $\begin{array}{rlcl} f: & \text{E} & \to & \mathbb{R} \\ & M & \longmapsto & f(M) = 4\left\|\overrightarrow{M\text{A}}\right\|^2 - 3\left\|\overrightarrow{M\text{B}}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{M\text{C}}\right\|^2. \end{array}$.

   Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

   $$f(M) = -36a^2.$$

   Représenter cet ensemble.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension trois, rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et soit f l'endomorphisme de E défini par.

$$f\left(\vec{\imath}\right) = f\left(\vec{\jmath}\right) = f\left(\vec{k}\right) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}.$$

1. Déterminer l'ensemble image Im f et le noyau Ker f de l'endomorphisme f. Montrer que Im f et Ker f sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux de l'espace vectoriel E.
2. **a.** Montrer que $f \circ f = 3f$.

   b. Démontrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ de E,

   $$\vec{u} \in \text{Im} f \iff f\left(\vec{u}\right) = 3\vec{u}.$$

3. On désigne par id_E l'application identique de E. Montrer qu'on peut trouver un réel α non nul tel que l'endomorphisme $g = \alpha f - \text{id}_\text{E}$ soit une involution. Montrer alors que g est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à Im f.

PROBLÈME **12 points**

Soit P un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\text{O}\,;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ direct. On appelle $\mathcal{P}$, le plan vectoriel associé à P.

Partie A

Pour tout réel a non nul, on considère l'application affine F_a de P dans P qui au point M d'affixe $z = x + \text{i}y$ associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \text{i}a\overline{z} + 2a(1 - \text{i})$$

avec $\overline{z} = x - \text{i}y$.

1. Donner suivant les valeurs de a l'ensemble des points invariants de F_a.
2. Pour quelles valeurs de a, F_a est-elle une isométrie de P ?
   Dans chaque cas préciser les éléments caractérisant F_a.

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \text{Log}\left(\frac{e^{2x}+3}{e^x-1}\right).$$

On appelle (Γ) sa courbe représentative dans le plan affine P.

1. Vérifier que $\forall x \in R_+^\star, \quad f(x) = x + \text{Log}\left[\frac{1+3e^{-2x}}{1-e^{-x}}\right].$
   Étudier la fonction f. Préciser les asymptotes à Γ. Construire Γ (unité : 2 cm).
2. On appelle g la restriction de f à l'intervalle $\text{I} = [\text{Log}\, 3\ ;\ +\infty[$.
   Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
   Énumérer les propriétés de g^{-1}.
   Sans calculer $\left(g^{-1}\right)(x)$ déterminer $\left(g^{-1}\right)'(\text{Log}7)$ (nombre dérivé de $\left(g^{-1}\right)$ au point Log 7).
3. α étant un réel strictement positif, résoudre $f(x) = f(\alpha)$.
4. Étudier les variations de la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par
   $v(x) = \text{Log}\left(\frac{e^{2x}+3}{e^x-1}\right)$ (ne pas construire sa courbe).
   Calculer $v(\text{Log}\, 3)$.
5. Soit $F = g^{-1} \circ f$.
   Donner l'ensemble de définition de F.
   Exprimer $F(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

Partie B

On considère le mouvement d'un point m de P dont les coordonnées sont données à l'instant t par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \text{Log}\left(t+2+\frac{4}{t}\right)+2\\ y &=& \text{Log}(t+1)-2.\end{array}\right.$$

Soit (γ) la trajectoire de m lorsque t décrit $\mathbb{R}_+^\star$.

1. Donner une équation cartésienne de la courbe (γ') transformée de (γ) par l'application F_1 (de la partie A 2. avec $a = 1$).
2. À l'aide de la courbe (Γ) tracée en B, construire la trajectoire (γ).
   Déterminer les asymptotes à (γ).
3. Donner le nombre de points de (γ) d'abscisse 4.
   La courbe (γ) est-elle la courbe représentative d'une fonction numérique ?