∽ Baccalauréat C Maroc octobre 1968 ∾

I

Soit un triangle équilatéral ABC ; on désigne par I le milieu de BC et par H la projection orthogonale de I sur AB.

1. Calculer $\dfrac{\overrightarrow{\text{HB}}}{\overrightarrow{\text{HA}}}$.
   En déduire que H est le barycentre de A(1) et B(3).
2. Déterminer le barycentre de B(2) et C(2).
   En déduire le barycentre, G, de A(1), B(5) et C(2).
3. Montrer que la droite BG coupe AC en J tel que $\dfrac{\overrightarrow{\text{JA}}}{\overrightarrow{\text{JC}}} = -2$.

II

On considère un repère orthonormé. Déterminer l'ensemble des points M dont les coordonnées, u et v, sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} u^2+v^2-2u-2\sqrt{3}v & < & 0,\\ u^2-2u-v^2 & > & 0.\end{array}\right.$$

(On demande de construire avec précision et soin l'ensemble des points M.)

III

Partie A

1. On désigne par σ_n la somme

   $$\sigma_n = 1+\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{-2}+\ldots+\mathrm{e}^{-n}$$

   (e base des logarithmes népériens).
   Montrer que σ_n est la somme d'une progression, dont on précisera la raison.
   Calculer σ_n en fonction de n et déterminer la limite de σ_n quand n augmente indéfiniment.
2. On propose de déterminer les primitives de la fonction φ définie par

   $$\varphi(x) = x(1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

   Posant $F(x) = \left(a+bx+cx^2\right)\mathrm{e}^{-x}$, calculer la dérivée, F', de F et déterminer a, b et c pour que $F' = \varphi$ pour tout x.
   En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Partie B

Soit f une fonction réelle de la variable réelle x, *périodique* et de *période* 1, c'est-à-dire telle que

$$f(x) = f(x+1),\quad \text{pour tout nombre réel } x.$$

D'autre part, la fonction f satisfait

$$f(x) = 4x(\ell-x)\quad \text{si}\quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

[On remarquera que, dans, l'intervalle $[0\,;+1]$ seulement, la fonction f est égale à la fonction

$$x \longmapsto 4x(1-x).$$

1. Tracer le graphe de f pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.
   Soit (C_0) l'arc de courbe obtenu. On désigne par (C_k) la restriction du graphe de f à l'intervalle $[k\,;\ k+1]$. Par quelle transformation géométrique simple l'arc (C_k) se déduit-il de (C_0) ?
   Montrer que, si $k \leqslant x \leqslant k+1$,

$$f(x) = 4(x-k)(1+k-x).$$

   (On pourra utiliser cette formule, même si elle n'a pas été démontrée.)
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $]-\infty\,;\ +\infty[$; tracer le graphe de f.

Partie C

Soit g la fonction définie pour $x \geqslant 0$ par

$$g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Construire avec précision le graphe de g pour $0 \leqslant x \leqslant 1$; soit (Γ_0) l'arc obtenu.
   Déterminer la mesure de l'aire limitée par (Γ_0) et l'axe des x. On désignera cette mesure par S_0.
2. Montrer que, pour tout x positif,

$$g(x+k) = \lambda(k)g(x) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

   λ étant une fonction de k, que l'on déterminera.
   [On tiendra compte de la périodicité de $f(x)$.]
   En désignant par (Γ_k) la restriction du graphe de g à l'intervalle $[k\,;\ k+1]$, montrer que (Γ_k) se déduit de (Γ_0) par le produit d'une translation et d'une affinité, que l'on précisera.

Partie D

Pour tout n entier positif on pose

$$S_n = \int_n^{n+1} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer, en utilisant les résultats de la question précédente que

$$S_n = \lambda(n)S_0.$$

On pose $\zeta_n = S_0 + S_1 + \ldots + S_n$.
Calculer ζ_n en fonction de n.
En déduire la limite de ζ_n quand n augmente indéfiniment.