

Durée : 4 heures

🌀 Baccalauréat C Maroc septembre 1969 🌀

EXERCICE 1

Soit f une fonction numérique dérivable.

1. Montrer que la limite de $\frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$ lorsque x tend vers a , $x \neq a$, est $f(a) - af'(a)$.
(Poser $x = a + h$.)
2. Applications :
 - a. Limite de $\frac{x^3 a - a^3 x}{x - a}$ lorsque x tend vers a .
 - b. Limite de $\frac{x - e \operatorname{Log} x}{x - e}$ lorsque x tend vers e .

EXERCICE 2

Résoudre le système d'inéquations

$$\begin{cases} \operatorname{Log}(x-1) + \operatorname{Log}(x+2) < 2\operatorname{Log}(2x+1), \\ e^{2x} - e^{x+2} - e^{2-x} + 1 < 0. \end{cases}$$

PROBLÈME

Partie A

Soit E l'espace rapporté au repère orthonormé $Oxyz$, E_1 le sous-ensemble de E constitué par les points $M(x; y; z)$ tels que $x \neq 1$.

Soit T l'application de E_1 dans E définie par

$$M' = T(M) = T[(x; y; z)] = \left(\frac{x}{1-x}; \frac{y}{1-x}; \frac{z}{1-x} \right).$$

1. Déterminer les points M de E_1 tels que $M = T(M)$.
2. Soit M' l'image par T d'un point M de E_1 .
Déterminer les coordonnées de M en fonction de celles de M' . Montrer que T est injective. Est-elle surjective ?
3. Soit Π un plan de E passant par O . Quelle est l'image par T de $\Pi \cap E_1$. Quelle est cette image lorsque Π est parallèle à Oy ?

Partie B

On considère dans le plan xOy l'hyperbole (H) d'équation

$$y = \frac{1}{x+1}.$$

1. Quelle est l'image par T de $H \cap E_1$?
2. Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{(x+1)^2}{2x+1}$$

et tracer la courbe (C) correspondante dans le repère orthonormé xOy . On déterminera l'asymptote oblique et l'on précisera la position de la courbe par rapport à cette asymptote; montrer que (C) admet un centre de symétrie.

Partie C

1. Exprimer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'asymptote oblique, l'axe Oy et la droite d'équation $x = \lambda$ ($\lambda > 0$).
2. Étudier l'intersection de la courbe (C) et de la droite $y = m$ du plan xOy . Étudier suivant les valeurs de m l'existence des racines de l'équation

$$\frac{(x+1)^2}{2x+1} = m$$

ainsi que leur position par rapport aux nombres -1 et 0 .