∽ Baccalauréat mathématiques élémentaires ∾ Maroc juin 1963

EXERCICE 1

On donne le nombre complexe $z = -1 - \mathrm{i}$.
Calculer son module et son argument.
Mettre z sous forme trigonométrique.
En déduire les nombres complexes dont le cube est égal à z. Donner les résultats sous la forme algébrique, sans utiliser de table numérique.

EXERCICE 2

On donne une sphère de centre O et de rayon R, un plan (P) passant par O, le rayon OA perpendiculaire à (P) et un plan (Π) parallèle à (P) et coupant OA en H tel que OH $= x$ ($0 < x <$R).
Calculer en fonction de x et de R l'aire S de la section de la sphère par le plan (II).
Calculer une primitive de S et en déduire le volume V du solide intérieur à la sphère et compris entre les deux plans parallèles. Donner R la valeur de V pour $x = \dfrac{\mathrm{R}}{2}$.

EXERCICE 2

Représentation plane des trajectoires orbitales d'un satellite.

1. Question préliminaire. - On donne la fonction

$$y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

   Calculer sa dérivée et utiliser cette dérivée pour étudier les variations et la représentation graphique de y lorsque x varie de 0 à 2π.

2. On donne alors un repère orthonormé Oxyz et le point M de coordonnées

$$x = R\cos v \cos u, \quad y = R\cos v \sin u, \quad z = R\sin v,$$

   où R est une longueur donnée et u et v les mesures en radians de deux angles tels que

$$0 < u < 2\pi, \qquad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}.$$

   Montrer que, si u et v varient, M décrit une sphère (S) de centre O.

   Montrer que v peut être considéré comme l'angle de OM et du plan xOy et u comme l'angle de Ox avec la projection de OM sur le plan xOy.

3. M appartenant toujours à la sphère (S), on suppose, de plus, que M se déplace dans le plan (Π) dont l'équation est $z = y$.

   M décrit donc dans ces conditions un cercle (γ). Trouver, dans ce cas, en utilisant les formules données à la question précédente, une relation entre une fonction circulaire de u et une fonction circulaire de v.

4. On projette M en H sur Oz et l'on prolonge la demi-droite d'origine H et portant HM jusqu'à ce qu'elle coupe en P le cylindre (C) d'équation

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

   [On remarquera que ce cylindre est circonscrit à la sphère (S).]

On dira qu'on a projeté M en P sur (C).

Calculer, en fonction de u et de v, les' coordonnées x', y', z' du point P.

Montrer, en utilisant la relation trouvée à la question 3, qu'il existe deux relations algébriques entre x', y', z'.

5. Pour effectuer une représentation plane du lieu de P on considère, dans un plan quelconque, un repère orthonormé $X\Omega Y$ et, dans ce plan, le point I de coordonnées X, Y, tel que l'on ait

$$X = u, \qquad Y = z.$$

On posera $R = 1$.

En utilisant la relation trouvée à la question 3 entre u et v, trouver la relation qui existe entre X et Y indépendamment de u et de v. Montrer qu'elle définit une fonction Y de X qui' n'est autre que la fonction étudiée à la question 1.