

## ♣ Baccalauréat C Maroc juin 1969 ♣

### I

Soit  $\mathbb{Z}$  l'anneau des entiers relatifs,  $\mathbb{Q}$  le corps des nombres rationnels.

1. Montrer que la relation

$$(y \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad 3y^2 \in \mathbb{Z})$$

implique la relation  $y \in \mathbb{Z}$ .

2. Montrer que la relation

$$(x \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x^2 - 3y^2 \in \mathbb{Z})$$

implique la relation  $y \in \mathbb{Z}$ .

3. Montrer que la relation

$$(x \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x \equiv 1 \pmod{2})$$

implique la congruence  $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$ .

4. Montrer que la relation

$$(x \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x \equiv 1 \pmod{2})$$

implique

$$x^2 - 3y^2 \not\equiv 0 \pmod{4}.$$

### II

Dans un plan (P) un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est donné.

À tout point  $M$ , de coordonnées  $(x; y)$ , on associe le point  $M'$ , de coordonnées  $(x'; y')$  :

$$x' = 3x - 2y, \quad y' = 4x - 3y.$$

Déterminer l'ensemble (E) des points  $M$  confondus avec leurs images  $M'$ .

Quand  $M$  n'appartient pas à (E), la droite  $MM'$  et (E) ont un point commun  $m$ . Comparer  $mM$  et  $mM'$ ; reconnaître la transformation qui à  $M$  associe  $M'$ .

### III

#### Partie A

Soit  $\mathbb{R}$  le corps des nombres réels et  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

- Déterminer la fonction  $f'$  dérivée de la fonction  $f$ .  
Soit  $f''$  la fonction dérivée seconde de la fonction  $f$ .  
Montrer que

$$f'' = f.$$

- Montrer que la fonction  $f$  est paire, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(-x).$$

Étudier les variations de la fonction  $f$  et construire son graphe  $(\mathcal{C})$  dans un repère orthonormé.

### Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ .  
On suppose connu le graphe  $(\gamma_0)$  de la fonction

$$x \mapsto e^x.$$

- Soit  $(\gamma)$  la courbe d'équation  $y = e^{x-1}$  et  $(\gamma')$  la courbe d'équation  $y = e^{-x-1}$ .  
Montrer que  $(\gamma)$  et  $(\gamma')$  se déduisent de  $(\gamma_0)$  par des transformations ponctuelles simples, que l'on précisera.  
Déterminer les graphes de  $(\gamma_0)$ ,  $(\gamma)$  et  $(\gamma')$  dans le même repère que  $(\mathcal{C})$ .
- Soit  $P$  un point de l'axe  $x'Ox$  d'abscisse donnée  $m$ .  
Déterminer en fonction de  $m$  les équations des droites  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  respectivement tangentes à  $(\gamma)$  et  $(\gamma')$  et qui passent par le point  $P$ .  
Préciser les coordonnées des points de contact  $T$  et  $T'$ .  
Comparer les directions de  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ .
- Trouver, lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R}$ , l'ensemble des points  $I$  milieux de  $TT'$ .  
Montrer que la droite  $TT'$  est tangente à la courbe ensemble des points  $I$ .
- Déduire des résultats précédents une construction géométrique de la tangente en un point donné  $J$  de la courbe  $(\mathcal{C})$ .

### Partie C

On considère un mobile dont la trajectoire est la courbe  $(\mathcal{C})$  et dont les coordonnées sont données en fonction du temps par

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \end{cases} \quad t \in [0; +\infty[.$$

Soit  $M(t)$  le point de coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$ .

- Déterminer les composantes scalaires du vecteur vitesse  $\overrightarrow{V}(t)$  et du vecteur accélération  $\overrightarrow{\Gamma}(t)$  à l'instant  $t$ .  
Comparer les modules de ces deux vecteurs avec l'ordonnée du point  $M(t)$ .

2. La trajectoire est supposée orientée de façon que le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V(t)}$  ait une mesure algébrique  $v(t)$  positive. Soit  $s(t)$  la mesure algébrique de l'arc  $\overline{M(0)M(t)}$  de la courbe  $(\mathcal{C})$ . On rappelle alors que

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Soit  $S(t)$  l'aire de la surface limitée par  $(\mathcal{C})$ , les axes de coordonnées et la parallèle menée par  $M(t)$  à  $(y'Oy)$ .

Évaluer  $s(t)$  et  $S(t)$  en fonction de  $t$ .