∽ Maroc juin 1967 ∽
Baccalauréat mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Soit un nombre complexe quelconque, $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels. Son image dans le plan complexe est m. On considère le nombre complexe

$$Z = \frac{\mathrm{i}\left(z^2\right)}{z+1} \quad \text{avec } z \neq -1$$

(on rappelle que i est tel $\mathrm{i}^2 = -1$.
Déterminer l'équation de l'ensemble, S, des points m tels que Z soit réel (on ne demande pas de construire S).

EXERCICE 2

1. α et β étant des entiers naturels avec $\alpha > \beta$, montrer que les deux propriétés suivantes :

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} \text{ est irréductible}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta} \text{ est irréductible}}$$

sont équivalentes.

2. Soit deux entiers naturels, a et b, tels que :

$$a > b,$$

$$a \cap b = \Delta \qquad (\text{le PGCD de } a \text{ et } b \text{ est } \Delta),$$

$$a \cup b = M \qquad (\text{le PPCM de } a \text{ et } b \text{ est } M).$$

Montrer que

$$(a-b) \cap M = \Delta \quad [\text{le PGCD de } (a-b) \text{ et } M \text{ est alors } \Delta].$$

EXERCICE 3

Partie A

1. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x+1)}{x+1}},$$

x étant un élément de $\mathbb{R}$.
Déterminer le domaine de définition, D, de $f\cdot$
Déterminer les limites :
   - de $f(x)$ quand $x \to 1$,
   - de $\dfrac{f(x)}{x+1}$ quand $x \to 1$,
   - de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand $x \to 0$;

dans ce dernier cas, on précisera la position de $\dfrac{f(x)}{x}$ par rapport aux valeurs obtenues comme limites.

2. **a.** Étudier la fonction f et construire la courbe représentative dans un repère orthonormé, d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$; afin de donner une construction précise, en utilisant par exemple les résultats de la question 1.

   Déterminer les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0 et -1 ; indiquer la position de la courbe par rapport à ces tangentes.

   b. En déduire le tracé de la courbe (γ) d'équation

$$y^2(x-1)+x^3+x^2=0.$$

Partie B

On considère la droite (D) d'équation $x = 1$ et le cercle (C) de centre A$(+1\ ;\ 0)$ et de rayon l'unité de longueur. Une droite variable (Δ) de pente $t\ (t \in \mathbb{R})$ pivote autour de l'origine, O, du repère. Cette droite Δ coupe :

– la droite (D) en M_D,
– le cercle (C) en M_C et O,
– la courbe (γ) en M_γ et O.

Montrer, en déterminant les abscisses de ces points, que

$$\overrightarrow{\text{OM}_\gamma}\ y = \overrightarrow{\text{M}_\text{C}\text{M}_\text{D}}\,.$$

En déduire géométriquement les points d'intersection, autres que l'origine, O, de (γ) et de (C). Déterminer les coordonnées de ces points.

Partie C

On considère l'inversion de pôle O et de puissance OA^2. Soit $M(X\ ;\ Y)$ l'inverse d'un point quelconque $m(x\ ;\ y)$ du plan. X Y

1. Montrer que $x = \dfrac{X^2}{X^2+Y^2}$ et $y = \dfrac{Y}{X^2+Y^2}$.
2. En déduire l'équation de l'inverse, (γ'), de la courbe (γ).
3. Construire (γ') et déterminer ses intersections avec (C) d'une part, avec (γ) d'autre part.