Baccalauréat Maroc septembre 1967
Mathématiques élémentaires

I.

1. Écrire la formule donnant le développement du binôme $(1+x)^n$.
   En donnant à x deux valeurs particulières, que l'on choisira, en déduire la valeur des sommes

$$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^2+\ldots+\mathrm{C}_n^n \quad \text{et} \quad \mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2-\ldots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n.$$

2. Déduire de la dernière formule la valeur de la somme

$$\frac{1}{0!n!}-\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{2!(n-2)!}-\frac{1}{3!(n-3)!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!0!}$$

   (Par convention, $0!=1$).

II.

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $p=\mathrm{e}^{n\operatorname{Log} n}$ est aussi un entier naturel.
Déterminer n et p, sachant que n est un entier premier et que l'entier p admet 4 diviseurs.

II.

Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n, qui, à x appartenant à l'intervalle ouvert $]-\pi\,;\,+\pi[$ associe

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sin x} \text{ si } x\neq 0 \text{ et } f_n(0)=n.$$

Partie A

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sin nx}{\sin x}$, ainsi que

$$\lim_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}}\frac{\sin nx}{\sin x} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to -\pi\\ x>-\pi}}\frac{\sin nx}{\sin x}$$

   La fonction f_n est-elle continue pour $x=0$?

2. Étude de f_3 et tracé du graphique de f_3 (on pourra, dans l'étude de ce graphique, commencer par exprimer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$).

Partie B

1. On désigne par $F_n(x)$ une primitive de $f_n(x)$ (on ne demande pas de déterminer F_n).
   Calculer la différence $f_n(x)-f_{n-2}(x)$ pour $n\geqslant 2$.
   En déduire l'expression de $F_n(x)-F_{n-2}(x)$, à une constante additive près.
   Calculer directement $F_2(x)$.
   En déduire $F_4(x)$ et $F_6(x)$.

2. En remarquant que $\sin^2 x$ s'exprime en fonction de $\cos 2x$, déterminer Jes primitives de $\sin^2 x$.
En déduire $F_3(x)$.
Écrivant alors l'expression de $F_n(x) - F_{n-2}(x)$ successivement pour $n = 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\ ,\ 2p+1$ et additionnant les résultats obtenus, en déduire (à une constante additive près) l'expression de $F_{2p+1}(x)$ sous la forme d'un terme en x et. d'une somme de sinus d'arcs en progression arithmétique, affectés de coefficients convenables.

Partie C

On considère dans le même intervalle $]-\pi\ ;\ +\pi[$ la fonction g_n, définie par $g_n(x) = \dfrac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}$ si $x \neq 0$ et $g_n(0) = n^2$ et l'on désigne par $G_n(x)$ une primitive de $g_n(x)$ dans cet intervalle.
Montrer que $g_{n+1}(x) - g_n(x) = f_{2n+1}(x)$.
En déduire que (à une constante additive près)

$$G_{n+1}(x) - G_n(x) = F_{2n+1}(x).$$

Calculer directement $G_1(x)$ et donner, en suivant la méthode indiquée dans le paragraphe précédent, l'expression de $G_{n+1}(x)$.