Baccalauréat mathématiques élémentaires
Maroc juin 1964

EXERCICE 1

Soient x et y deux nombres réels. On pose

$$x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6 = f(x,\ y)$$

$$\text{et}\quad 6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5 = g(x,\ y).$$

1. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & 1\\ g(x,y) & = & 0.\end{array}\right.$$

2. Vérifier que $f(x,\ y) + \mathrm{i}g(x,\ y) = (x+\mathrm{i}y)^6$ et montrer que la résolution du système de la question précédente donne les solutions de l'équation $z^6 = 1$ lorsqu'on pose $x + \mathrm{i}y = z$.

Résoudre cette équation, en posant

$$z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

N. B. - Il n'est pas nécessaire d'avoir traité la première question pour résoudre la deuxième.

EXERCICE 2

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $x\mathrm{O}y$ on considère la transformation ponctuelle qui à un point M du plan de coordonnées $x,\ y$ fait correspondre le point M' de coordonnées $x',\ y'$ telles que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -\dfrac{x}{1-x}\\ y' & = & \dfrac{y}{1-x}\end{array}\right.$$

Partie A

1. Montrer que cette transformation est involutive et qu'elle admet des points doubles, que l'on déterminera. Quels sont les points qui n'ont pas de transformé ?

2. Montrer que les droites OM et OM' sont symétriques par rapport à Ox et que la droite MM' coupe l'axe des x en un point C fixe.

Donner une construction géométrique de M', connaissant M, et retrouver les résultats de la question 1.

Partie B

1. On considère une droite (d) d'équation

$$ax + by + c = 0\ ;$$

montrer que la figure transformée de (d) est une droite (d$'$).

(d) et (d') peuvent-elles être confondues ? Comment faut-il choisir (d) pour que (d) et (d') soient parallèles ?

Quand (d) et (d') sont concourantes, où se trouve leur point de rencontre ?

Étudier les points de rencontre de (d) et (d') avec Ox et donner une construction géométrique de (d'), connaissant (d).

2. Soit (D) un ensemble de droites et (D$'$) l'ensemble des droites transformées.

Si (D) est formé de droites concourantes que peut-on dire de (D$'$) ?

Si (D) est un ensemble de droites parallèles, que peut-on dire de (D$'$) ? Étudier le cas particulier des droites parallèles à Ox.

3. Déduire des résultats précédents une nouvelle construction géométrique de M', connaissant M.

Partie C

1. On considère le cercle (Γ) d'équation

$$x^2 + y^2 - 2\gamma x + \lambda = 0,$$

γ et λ étant deux paramètres. Déterminer λ en fonction de γ de telle sorte que le cercle (Γ) soit invariant dans la transformation.

Montrer que l'ensemble des cercles qui se conservent dans la transformation est un faisceau, dont on précisera la nature.

2. On considère les cercles d'équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 9 = 0.$$

Montrer que les figures transformées de ces cercles sont en général des coniques, dont on indiquera la nature suivant la valeur de a.

Établir que ces coniques passent par deux points fixes.

Construire la figure transformée du cercle de la famille passant par le point C.