

Matériaux pour une documentation

MATHÉMATIQUE ET PÉDAGOGIE

Périodique de la S.B.P.M. (Belgique)

Conditions d'abonnement : A.P.M.E.P. - Informations p. 546

Recension par Henri BAREIL des n°75 et 76.

N° 75

SUITES DE FAREY ET QUELQUES APPLICATIONS,

par Michel BALLIEU (9 pages).

- "On appelle suite de Farey de rang n , la suite croissante des fractions irréductibles $\frac{a}{b}$ telles que $1 \leq b \leq n$ ".

- Les applications citées concernent :

- d'excellentes approximations de π
- des résolutions d'équations diophantiennes du type $\alpha y - \beta x = 1$
- des récupérations de phénomènes ondulatoires périodiques (ou quasi) "endommagés".

LA GÉOMÉTRIE AU DÉBUT DU SECONDAIRE (à 12 ans)

par Jean CARLOT et Bernard HONCLAIRE (16 pages)

"Le but essentiel est d'apprendre à raisonner [...]. Des démonstrations simples peuvent être abordées d'emblée, à condition de bien clarifier les données et les prérequis acceptés comme point de départ".

En première année, les élèves sont encouragés à s'exprimer à partir de figures magnétiques que l'on peut déplacer, assembler, ... de pavages du plan, ...

Ce qui vise à faire ainsi :

- utiliser et reconnaître des figures, organiser leurs propriétés, ... dénombrer et classer,
- élaborer des programmes de construction,

- étudier des figures ayant axe ou centre de symétrie,
- reconnaître les invariances des figures-clés par retournement, rotations, ...
- étudier les transformations géométriques du plan en liaison avec les figures-clés et le dessin des images.

MÉTHODE GRAPHIQUE POUR TROUVER LE MAXIMUM DU REVENU TOTAL DANS UN RÉGIME MONOPOLISTIQUE,
par Jacques BAIR (6 pages).

On y trouve notamment :

- une analyse d'un exemple de demande linéaire,
- une étude de maximalisation du revenu total avec construction géométrique des points d'élasticité unitaire et calcul du revenu marginal.

LE COIN DE MATH-JEUNES , par Claudine FESTAETS (6 pages), avec les énoncés et les solutions de cinq problèmes.

VOYAGE EN PROBABILITÉS, RÉCURRENCE ET COMBINATOIRE
par Pascal DUPONT (15 pages).

Le problème initial, relatif à des tirages, est pour l'auteur, "un prétexte à exposer le processus de réflexion mené pour le résoudre" ... "dans l'espoir d'éveiller des échos, de susciter des réflexions...", ... "comme illustration de ce que peut être la recherche en mathématiques avec sa succession de phases inductives, de conjectures, de phases déductives ..."

DANS NOS CLASSES. (1 page) : un calcul de cylindrée.

ET D'AUTRES RUBRIQUES HABITUELLES :

- Bibliographie ; revue des revues ;
- un compte-rendu sur le passage du secondaire aux études d'ingénieurs industriels ;
- les énoncés du 4ème championnat international de France des Jeux Mathématiques et Logiques ;
- DES PROBLEMES ET DES JEUX, par Claudine FESTAETS, avec des solutions de 3 problèmes et les énoncés de 3 autres dont voici le premier :
"Les longueurs des côtés d'un triangle sont 6 ; 8 ; 10. Démontrer qu'il y a exactement une droite qui partage simultanément l'aire et le périmètre en deux parties égales".

ENFIN Jacques BAIR lance un appel pour une réflexion en commun pour toujours mieux utiliser les problèmes dans l'enseignement.

N° 76

D'OU VIENNENT LES MOTS UTILISÉS EN MATHÉMATIQUES,
par Harold VIGIS (6 pages).

Saviez-vous que, jusqu'au 16ème siècle, "chiffre", venu du sanscrit par l'arabe, signifiait zéro?

L'auteur rappelle aussi le lancement, en 1925, du mot "médiatrice" par l'A.P.M.E.P.

QUELQUES COURBES EN COORDONNÉES PARAMÉTRIQUES
par C.FESTRAETS et E. ROBAYE

Six pages dont deux de dessins de courbes et trois d'un programme ordinateur qui fait se succéder des courbes d'équations :

$$x = f_1\left(\frac{at}{b} + \frac{c}{d}\right) f_2(t) \quad \text{où } f_1, f_2, f_3, f_4 \in \{\sin, \cos\}$$

$$y = f_3\left(\frac{at}{b} + \frac{c}{d}\right) f_4(t) \quad \text{et } a, b, c, d \in \mathbb{N}$$

LA SIMULATION DE SYSTEMES DYNAMIQUES : UNE APPROCHE DE LA MATHÉMATIQUE APPLIQUÉE ADAPTÉE A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE (première partie), par J.LEFEVRE,... portant sur des équations différentielles.

DES CARRÉS, DES SINUS ET DES COSINUS DES MULTIPLES RATIONNELS DE π , 10 pages, par J.FINOULST

EXTRACTION MENTALE D'UNE RACINE CUBIQUE,
3 pages, par P. DASSY.

CONSTRUIRE ET ARGUMENTER EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE
21 pages, par F.VAN DIEREN-THOMAS.

L'auteur part du constat que, pour des débutants, "une figure est encore interprétée comme la totalité de ses propriétés".. Elle veut "briser leur concomitance perçue globalement [...] en proposant certaines constructions à l'aide d'instruments imposés".

Suivent 14 problèmes (classiques et intéressants) de "lieux géométriques", "visant les élèves de 12 à 15 ans" (chèvre attachée sur une paroi de cabane; ...; 3 points étant donnés, trouver dans leur plan les points plus proches d'un des trois points que des deux autres ; ...). Leur rapprochement et les exploitations préconisées sont séduisants.

DES RUBRIQUES HABITUELLES (ou prêtes à le devenir) :

- Solutions par C.FESTRAETS, des trois premiers problèmes de la 30ème *Olympiade internationale*.
- *Dans nos classes*, par Y.NOEL, avec des exercices -résolus- tirés du *Mathematics teacher* de décembre 1989.
- *Le coin de Math-Jeunes*, par C.FESTRAETS, avec énoncés et solutions de quatre problèmes.
- "*Géométrie*", rubrique de C.FESTRAETS, lancée dans le n°74, pour créer un vivier de problèmes utilisant avec profit des transformations isométriques ou des similitudes, et qui étudie ici trois nouveaux problèmes (pas tout à fait nouveaux cependant ...).
- "*Des problèmes et des jeux*", encore par C.FESTRAETS, avec des solutions de 4 problèmes et 3 nouveaux énoncés, dont voici le dernier : "pour un triangle d'aire A et de périmètre $2p$, démontrer que $A \leq \frac{p^2}{9}\sqrt{3}$ ".
- Une étude sur la HP 48 SX par F. MICHEL.
- Une *revue des revues*, par G. NOEL et G. VILLERS
- Une *Bibliographie*, par J. BAIR (qui lance par ailleurs une nouvelle rubrique : "Humour") et C.VILLERS.

Deux coups de projecteur sur

MATHEMATICS TEACHER 1990

- par Henri Bareil -

Il s'agit de la revue mensuelle du N.C.T.M. (National Council of Teachers of Mathematics) des U.S.A.

1

A PROPOS DE L'ENSEIGNEMENT DE LA STATISTIQUE

◇ *Cet enseignement est fréquemment présent dans Mathematics Teacher :*

- éditorial du numéro de mai ;
- étude élémentaire, en avril, de séries statistiques, avec variance, écart-type, intervalle de confiance, chi deux, ...

◇ *Surtout le numéro de février lui est presque entièrement consacré, ainsi qu'à son utilisation :*

Ce numéro foisonne de *graphiques en "tiges et feuilles" et en "boîtes"*, graphiques très intéressants pour comparer les distributions de séries statistiques.

- Vous ne savez pas ce que sont ces graphiques ? ... Reportez-vous alors à la Brochure A.P.M.E.P. sur la classe de Seconde (nouveau programme)... (En gros, en ce qui concerne une "boîte", celle-ci va du premier quartile au troisième, avec mise en évidence de la médiane, cependant que son axe va jusqu'à la plus petite valeur et jusqu'à la plus grande).

◇ *Dans la plupart des textes de ce numéro du Mathematics teacher, les graphiques en "boîte" sont "améliorés" pour leur faire signifier davantage :*

- chasse aux valeurs extrêmes aberrantes en coupant les axes des boîtes (et en le montrant) au delà des boîtes, à une fois et demie la hauteur de ces boîtes,
- surtout visualisation des importances respectives des populations dont les distributions sont comparées : les largeurs des boîtes sont fonction de ces

populations, par exemple en les prenant proportionnelles aux racines carrées de ces populations (Cf graphique 1 ci-dessous)

- boîtes en "taille de guêpe" autour de la médiane, pour manifester des intervalles de confiance (à 95% ci-dessous, dans le graphique 2), ce qui facilite la comparaison des effectifs les plus intéressants : les différences entre les médianes de deux populations sont significatives si leurs "tailles de guêpe" n'empiètent pas l'une sur l'autre. Ce qui est le cas, sur le graphique 2, pour A et B, ou B et C, ..., mais pas pour C et D par exemple:

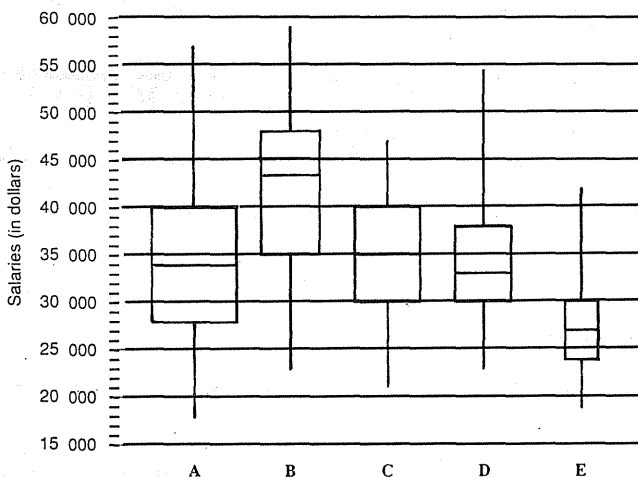


Fig. 1: Variable-width box plots for salary distribution for five divisions of a corporation

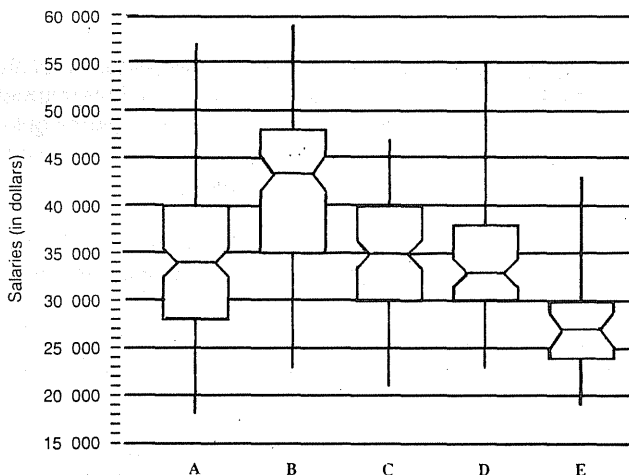
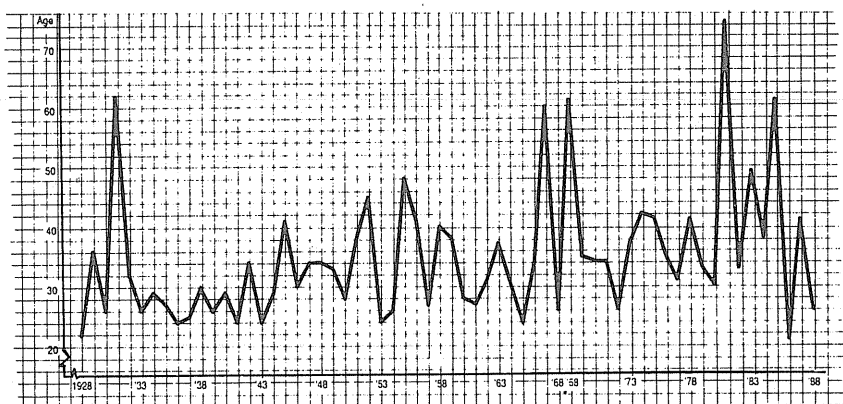


Fig. 2: Notched box plots for salary distributions for five divisions of a corporation

◊ Ce même numéro de février donne un exemple de lissage d'un graphique cartésien tout en cimes et abîmes, puisqu'il fait passer du graphique 3 au graphique 4.

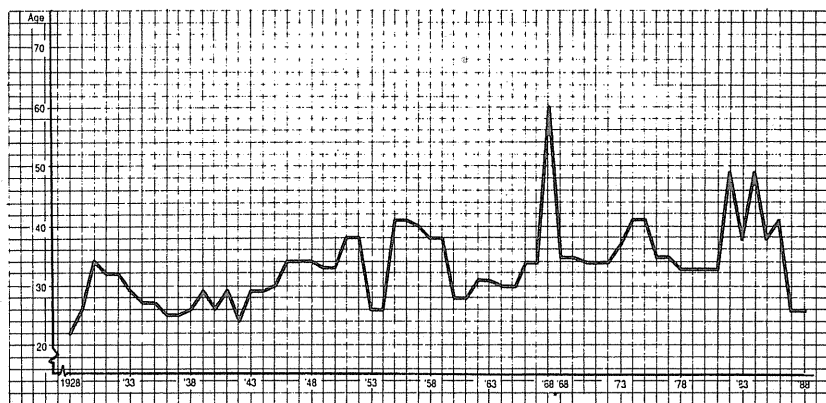
Le graphique 3 donne l'âge de l'actrice réputée la meilleure chaque année (mais il y eu deux oscars en 1968). Pour obtenir le graphique 4, on remplace, pour chaque année n , l'âge correspondant par la moyenne des âges relatifs aux trois années $n - 1, n, \text{ ou } n + 1$.

On pourrait aussi lisser, par la même méthode, en remplaçant n par la moyenne de cinq années autour de n ...



*A tie occurred in 1968

Fig 3 Ages of best actresses. 1928-1988



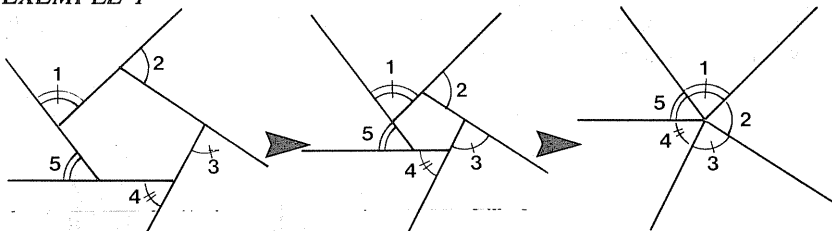
*A tie occurred in 1968

Fig. 4. Ages of best actresses after three-point median smoothing

2 UNE CURIEUSE MÉTHODE DE DÉCOUVERTE EN GÉOMÉTRIE (N° d'avril)

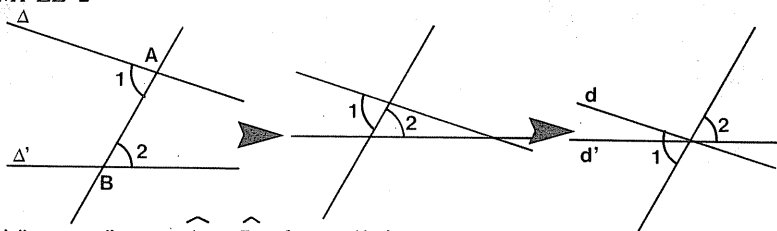
Gardons-lui son nom américain de "big-picture", tant il est difficile d'exprimer en français les évanouissements qu'elle comporte. (Cette méthode a été déjà présentée par le "B.G.V." du N.C.T.M. voici quelque 2 ans).

EXEMPLE 1



Voilà qui "montre" que la somme des angles extérieurs d'un polygone convexe est 360° .

EXEMPLE 2



... qui "montre" que : $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ alors $\Delta // \Delta'$.

PRUDEMMENT l'article ajoute, sur cette méthode, une appréciation que je résumerai ainsi :

"Les arguments par "big-picture" sont surtout des "arguments par analogie", lesquels infèrent que si deux choses sont semblables par quelques aspects, elles le seront probablement par d'autres. Voilà qui est pratique courante dans la vie quotidienne, mais qui ne prouve rien. Et, en géométrie, le procédé "big-picture" est disqualifié lorsque les longueurs des segments en jeu importent, par exemple pour la relation de Pythagore".

Mais l'article insiste, n'est-ce pas à juste titre ?, sur l'intérêt de la méthode pour conjecturer et convaincre dans des cas qui s'y prêtent (problèmes d'angles notamment). D'autant que les traitements par ordinateur peuvent faire faci-

lement visualiser les rétrécissements, et les anti-zooms, éventuellement jusqu'à l'évanouissement apparent...

MATH - ÉCOLE

- Recension par Henri BAREIL -

"Math-Ecole" est une revue de l'enseignement mathématique en Suisse romande. Elle concerne essentiellement l'enseignement élémentaire, mais elle ne s'interdit pas pour autant des éclairages, toujours passionnants, sur des niveaux supérieurs, et sa réflexion pédagogique est toujours du plus haut intérêt, pour les enseignants de lycées et de collèges aussi bien que pour ceux du premier degré.

Cette revue paraît 5 fois par an. Elle coûte (pour la France) 18 francs suisses. Les abonnements sont à prendre, avec le CCP 12-4983, CP 119 ; CH 1211 GENEVE 11.

NUMÉRO 139

◇ DE L'EXPÉRIMENTATION A LA DÉMONSTRATION
(10 pages, dont 5 fiches données aux élèves, par André CALAME)

L'auteur examine d'abord la façon dont procèdent les élèves avant le Collège : "On observe des êtres mathématiques : nombres, figures, ou opérations, et on note des propriétés intéressantes ; dans le meilleur des cas, on énonce une loi générale. On fait de l'induction". Il note que, la conviction des élèves ainsi acquise, il est alors impossible de faire mieux.

Par opposition, dès le Collège, un résultat tiré de l'expérimentation n'est bientôt plus qu'une conjecture, qu'il s'agit dès que possible de démontrer. "Le statut de la preuve est complètement modifié. On peut dire qu'il y a rupture du contrat pédagogique par rapport aux années précédentes. L'induction doit faire place à la déduction".

"Les élèves sont souvent désemparés par ce revirement méthodologique". André CALAME examine alors les facteurs de blocage.

Puis il propose des exemples où une généralisation à partir de cas particuliers, et qui conduit à une séduisante conjecture, se révélera fausse si on creuse un peu ... ou beaucoup.

Sur ce thème, l'auteur donne une très belle étude mathématique relative à "la région perdue" d'un disque : prenons n points sur un cercle, joignons les deux à deux, et comptons le nombre de régions du disque ainsi formées.

Pour $n =$ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5
 le nombre de régions est 2^0 ; 2^1 ; 2^2 ; 2^3 ; 2^4

La conjecture s'annonce magnifique : $n \rightarrow 2^{n-1}$. Or, elle dérape dès $n = 6$.

André CALAME explique pourquoi :

D'abord en démontrant la formule (exacte !) donnant le nombre r de régions en fonction de n . Cette démonstration par le détour de la célèbre formule d'Euler $f - a + s = 2$, est très belle, passionnante pour une activité en Terminale C ou D, et mériterait à elle seule la fréquentation de Math-Ecole !

Puis Andre CALAME explique, à partir du triangle de Pascal, comment mettre la formule assez disparate

$$r = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}$$

sous la forme harmonieuse :

$$r = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4},$$

et il en déduit alors parfaitement ce qui se passe ! "La frustration, devant les cas $n \geq 6$, a disparu et on en conclut que la conjecture fautive avait sa raison d'être. La démonstration a permis de mieux saisir les articulations internes du problème".

◇ DOMINONS LA DIFFÉRENCIATION

(20 pages, par Françoise HIRSIG et Ninon GUIGNARD)

"La question de la différenciation rejoint celle de la motivation. Certes, le maître a envie de proposer à ses élèves des activités intéressantes et motivantes tout en gardant le souci de s'adresser à chacun en particulier. Nous ne contestons pas ce désir. Nous attirons seulement l'attention sur une autre forme de motivation et de différenciation : celle que l'élève produit lui-même pour lui-même, parce qu'il saisit le plaisir de la recherche, la fierté de la découverte, l'intérêt de la mathématique".

Dans cette optique les auteurs ont analysé l'activité et les démarches des élèves de trois niveaux, de 8 ans à 12 ans, à partir ... d'une boîte de dominos et d'une recherche de la façon dont les dominos sont construits, recherche motivée par la question "Combien y a-t-il de dominos dans la boîte ?"

"...Le rôle du maître est primordial.

Son observation des élèves en train de mathématiser lui ouvre l'accès à leurs représentations de la tâche et à leurs niveaux de connaissance. Ses relances servent à donner du sens aux recherches et à les finaliser"...

◇ A PROPOS DE LA GÉOMÉTRIE DE VINCENOT

2 pages, par François JAQUET.

Dans un de ses romans, par la bouche d'un Maître Compagnon, le bourguignon VINCENOT propose de beaux tracés géométriques plutôt inattendus. Math-Ecole n°137 suggérait de les vérifier.

François JAQUET apporte maintenant son analyse critique, utilisant triangles semblables, relation de Pythagore, radicaux ...

D'où il ressort que l'un des tracés proposés est faux, mais conduit à une approximation intéressante qui remplace l'angle de 36° du triangle d'or par un angle de $35,26^\circ$: "Jehan le Tonnerre pouvait donc parfaitement retenir cette approximation et entrer dans la confrérie des compagnons constructeurs"...

◇ L'ÉDITORIAL luttait contre le manichéisme de certaines prises de position à propos des programmes de mathématiques (... ou de la vie courante, économique, sociale, politique !) tandis que, à propos des 20 ans de l'Institut Romand de Recherche et de Documentation pédagogiques, l'article final débat de problèmes généraux touchant à la structure et à l'organisation de l'enseignement en Suisse Romande.

SOMMAIRE DU NUMÉRO 140

◇ Editorial, par F.OBERSON.

◇ 3ème Championnat de France des jeux mathématiques et logiques, par F.JACQUET, avec 12 questions niveau Collèges et leurs solutions.

◇ Les rendez-vous d'enseignement mathématique, par M.CHASTELLAIN, (analyse de journées d'échanges sur des thèmes couvrant les divers niveaux d'enseignement primaire et secondaire).

◇ La bibliothèque du maître de mathématiques, par CH.FELIX et A.GAGNEBIN.

◇ Le jeu de l'oie, par J.P.BUGNON et E.GASSER.

◇ Enseigner autrement, recension d'un livre de O.CLOUZOT.

SOMMAIRE DU NUMÉRO 141

◇ *Editorial* , par R.HUTIN.

◇ *La résolution de problèmes arithmétiques*, par J.BRUN.

◇ *La méchante sorcière de l'Ouest*, par R.DÉLEZ et J.LÄNG

... Activité de recherche mathématique, à partir de 7 cartes proposées aux candidat(e)s à l'enseignement primaire ... Il y a des listes de questions, de réponses ... apparemment aléatoires : c'est passionnant !

Les plus belles formules mathématiques

par L. et C.SALEM et F.TESTARD. *Inter Editions (parution Juin 1990)*

Voilà un bon livre de "vulgarisation", au bon sens du terme et comme il en existe trop peu en France, à propos de près de 50 formules ou configurations célèbres, que ce soit $2^n \times 2^m = \dots$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, "Pythagore", $\sin A / a = \sin B / b = \dots$, la surface de la sphère, ..., ou le nombre d'or, le triangle de Pascal, $f - a + s = 2$, la limite pour $n \rightarrow \infty$ de " $1 + 1/2 + \dots + 1/n - \text{Log } n$ ", $e^{i\pi} = -1$, ..., les ponts de Königsberg, ...

Cet extrait suggère la richesse et l'ampleur du florilège qui, en terme de programmes scolaires va de la Sixième au DEUG.

L'exploit tient en ceci : chaque formule est aimablement présentée, de façon simple, convaincante, sympathique, souvent très humoristique, induite ou justifiée par des arguments à la portée d'un large public et, notamment, d'élèves de 4ème et 3ème. Ce qui donne une excellente éducation au raisonnement - au sens large du terme, donc, le plus fécond -.

Abondamment illustré, terminé par un index biographique, l'ouvrage cherche par dessus tout à éveiller l'intérêt, à rechercher la compréhension, à montrer la beauté mathématique. Plaisant et délectable, il a tous les atouts pour y réussir, pour faire aimer les mathématiques et donner envie de les découvrir.

Devant tant de mérites, on n'a pas le courage de déplorer telle notation ou expression (par exemple : "la circonférence du cercle")... Ce ne sont que de minuscules grains de poussière...

Chaque collège, chaque lycée gagnerait à offrir ce livre à la curiosité de ses élèves et, pour cela, à disposer de nombreux exemplaires.

Henri BAREIL