Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Mauritanie et Sénégal juin 1969 ∾

EXERCICE 1

Dans un plan on donne deux points fixes, A et B, et l'on pose AB $= 3a$. Déterminer avec précision l'ensemble des points M du plan, tels que le vecteur $\left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right)$ soit orthogonal au vecteur $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right)$.

EXERCICE 2

Soit la suite de terme général

$$n \in \mathbb{N}^{\star}, \quad U_n = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}.$$

1. Déterminer deux constantes, a et b, telles que

$$\forall n, \quad U_n = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+3}.$$

2. En déduire une expression simple de la somme $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$.
3. Trouver la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$.

PROBLÈME

Dans un plan muni d'un repère quelconque $x\mathrm{O}y$, de vecteurs unitaires $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, on considère la transformation ponctuelle, T, qui au point $M(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $M_1\left(x_1\ ;\ y_1\right)$ défini par les formules

$$T \quad \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{2x}{1+x}, \\ y_1 & = & \dfrac{2y}{1+x}. \end{array}\right.$$

Partie A

1. Déterminer l'ensemble, E, des points (x, y) qui n'ont pas de transformé par T. Définir la transformation réciproque, T^{-1}. Déterminer l'ensemble, F, des points $\left(x_1\ ;\ y_1\right)$ qui n'ont pas de transformé par T^{-1}. Déterminer l'ensemble des points doubles de T.
2. (D) étant une droite d'équation $ux + vy + w = 0$, trouver l'équation de sa transformée, (D_1) Montrer que (D) et (D_1) concourent sur la droite (Δ) d'équation $x = 1$, ou sont parallèles à (Δ).

   Comparer les ordonnées à l'origine de (D) et (D_1).

   Montrer que les points O, M et M_1 sont alignés et, en appelant P l'intersection de OM et de (Δ), montrer que la division (O, M_1, M, P) est harmonique.

Partie B

Dans ce qui suit, on considère l'ensemble (H) d'équation $xy = 1$ et son transformé, (H_1) par T.

1. Donner l'équation de (H_1) sous la forme $y_1 = f\left(x_1\right)$.

   Étudier les variations de la fonction $y_1 = f\left(x_1\right)$ et construire dans le même repère $x\mathrm{O}y$ les courbes (H) et (H_1). Préciser les asymptotes de (H_1) et les points communs à (H) et (H_1).

2. À tout point M, noté ici $M(\alpha\ ;\ \beta)$, situé sur (H), et à son image, $M_1\left(\alpha_1\ ;\ \beta_1\right)$, on associe les vecteurs

$$\begin{array}{rcccc} & \overrightarrow{V(\alpha)} & = & \overrightarrow{\mathrm{O}M} = & \alpha\overrightarrow{\imath} + \beta\overrightarrow{\jmath}\\ \text{et} & \overrightarrow{V_1(\alpha)} & = & \overrightarrow{\mathrm{O}M_1} = & \alpha_1\overrightarrow{\imath} + \beta_1\overrightarrow{\jmath}\end{array}$$

Calculer les composantes scalaires des vecteurs $\overrightarrow{V'(\alpha)}$, $\overrightarrow{V_1'(\alpha)}$, dérivés par rapport à α de $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V_1}$.
Former les équations des tangentes, MT et M_1T_1, à (H) en M et à (H_1) en M_1.
Comparer les ordonnées à l'origine de ces tangentes.
Montrer que MT et M_1T_1 se coupent sur la droite (Δ).