

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Métropole septembre 1993 ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit le nombre complexe $u = 1 + i$ et \bar{u} son conjugué.

1.
 - a. Mettre u et \bar{u} sous forme trigonométrique.
 - b. Soit n un entier naturel. On pose : $S = u^n + \bar{u}^n$.
Déduire de a. que $S_n = \lambda_n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ où λ_n est un réel à préciser en fonction de n .
 - c. Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n = 0$?
 - d. Prouver que si n est pair, S_n est un entier relatif.
2. On suppose que n est un entier naturel pair et on pose $n = 2m$.
 - a. Écrire, par la formule du binôme, les développements de $(1 + i)^{2m}$ et $(1 - i)^{2m}$ à l'aide des puissances de i , puissances que l'on ne cherchera pas à simplifier dans cette question.
 - b. Pour p entier naturel, simplifier : $i^{2p+1} + (-i)^{2p+1}$ et $i^{2p} + (-i)^{2p}$.
 - c. Exemple $n = 24$ (donc $m = 12$) :
En utilisant les résultats du 1. et ce qui précède, montrer que :

$$\sum_{p=0}^{12} (-1)^p C_{24}^{2p} = 2^{12}.$$

EXERCICE 2

4 points

Dans le plan orienté, on considère les cercles (C) et (C') de centres respectifs O et O' , de rayons R et R' ($R \neq R'$) sécants en A et B ($A \neq B$).

1. Soit S_A la similitude plane directe de centre A qui transforme O en O' .
Préciser son rapport et son angle en fonction des données.
Déterminer l'image de (C) par S_A .
2. Soit I le barycentre du système $\{(O, R'); (O', R)\}$ et J le barycentre du système $\{(O, R'); (O', -R)\}$.
 - a. En prenant $OO' = 5$ cm, $R = 4$ cm et $R' = 2$ cm, faire une figure dans laquelle apparaissent I et J .
 - b. Montrer que les centres des similitudes planes directes S transformant (C) en (C') sont sur le cercle (Γ) de diamètre $[IJ]$.
Vérifier que A et B sont sur (Γ) ; construire (Γ) .
 - c. Montrer qu'il existe deux similitudes, d'angles respectifs $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, transformant (C) en (C') . Préciser leurs centres respectifs.

- d. Montrer que l'ensemble des centres des similitudes planes directes qui transforment (C) en (C') est le cercle (Γ) .

PROBLÈME**12 points**

On considère pour n entier naturel non nul, la fonction numérique f_n définie sur $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^2(\ln x)^n \quad \text{pour } 0 < x \leq 1, \text{ et } f_n(0) = 0.$$

On note (\mathcal{C}_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Soit p un entier naturel; en utilisant la limite de $t^p e^{-t}$ lorsque t tend vers $+\infty$, montrer que la limite de $x(\ln x)^p$ lorsque x tend vers 0 est égale à 0.
2. En déduire, pour tout entier $k \geq 1$, la limite de $x^k(\ln x)^p$ lorsque x tend vers 0.
3. Montrer que f_n est dérivable en 0 et calculer son nombre dérivé en 0.

Partie B

1. Étudier le sens de variation de f_1 sur $[0; 1]$.
2. a. Montrer que pour n entier supérieur ou égal à 1 : $0 < e^{-\frac{n}{2}} < 1$.
b. L'entier n étant fixe ($n \geq 1$), résoudre dans $]0; 1]$ l'inéquation :

$$\ln(x) + \frac{n}{2} \leq 0$$

- c. Montrer que si $n \geq 2$, alors f_n est dérivable sur $]0; 1]$ et $f'_n(x)$ admet le même signe que $(\ln x + \frac{n}{2})(\ln x)^{n-1}$ pour tout x élément de $]0; 1]$ tel que $f'_n(x) \neq 0$.
- d. Étudier le sens de variation de f_n sur $]0; 1]$ pour $n \geq 2$. (On distinguera deux cas, suivant la parité de n , et on dressera les deux tableaux de variations.)
3. L'unité graphique étant 10 cm, construire (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) .
Déterminer les coordonnées de leurs points communs.
4. Montrer que les courbes (\mathcal{C}_n) passent par deux points indépendants de n . Préciser les coordonnées de ces deux points.

Partie C

Dans cette partie, t désigne un réel appartenant à $[0; 1]$ et n désigne un entier naturel non nul.

1. Prouver que l'intégrale de f_n de t à 1, existe.
On pose

$$I_n(t) = \int_t^1 f_n(x) dx \quad \text{et} \quad L_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

2. Montrer que la fonction $t \mapsto L_n - I_n(t)$ est la primitive sur $]0; 1]$ de la fonction f_n qui s'annule pour $t = 0$.
3. En déduire que $I_n(t)$ admet pour limite L_n lorsque t tend vers 0.
4. On considère la fonction numérique F définie sur $]0; 1]$ par :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} \text{ pour } 0 < x \leq 1, \text{ et } F(0) = 0.$$

- a. Prouver que F est dérivable sur $]0; 1]$ et calculer $F'(x)$ pour $x \in]0; 1]$
- b. Prouver que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.
- c. En déduire que F est une primitive de f_1 sur $]0; 1]$. Calculer L_1 .
5. Soit φ_n la fonction définie sur $]0; 1]$ par :

$$\varphi_n(t) = -\frac{1}{3} t^3 (\ln t)^n.$$

- a. Déterminer la limite de $\varphi_n(t)$ lorsque t tend vers 0.
- b. À l'aide d'une intégration par parties prouver que, pour t élément de $]0; 1]$:

$$I_{n+1}(t) = \varphi_n(t) - \frac{n+1}{3} I_n(t).$$

- c. En déduire que :

$$L_{n+1} = -\frac{n+1}{3} L_n.$$

- d. Prouver, par récurrence sur l'entier naturel non nul n , que :

$$L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}.$$

- e. Calculer en fonction de n l'aire (exprimée en unités d'aire) de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}_n) et l'axe des abscisses.