Baccalauréat S Métropole juin 1998

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, A et B étant deux évènements, $P(A)$ désigne la probabilité de A ; $P(B/A)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :

i	0	1	2
$p_i = P(X = i)$	0,1	0,5	0,4

a. Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est $0,7$; celle qu'il achète du gazole est $0,3$. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les évènements suivants :

C_1 « en cinq minutes, un seul client se présente » ;

C_2 « en cinq minutes, deux clients se présentent » ;

E : « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence ».

a. Calculer $P(C_1 \cap E)$.

b. Montrer que $P(E/C_2) = 0,42$ et calculer $P(C_2 \cap E)$.

c. En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes ; déterminer la loi de probabilité de Y.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(1) \quad \frac{z-2}{z-1} = z$$

On donnera le module et un argument de chaque solution.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(2) \qquad \frac{z-2}{z-1} = \text{i}.$$

On donnera la solution sous forme algébrique.

3. Soit M, A et B les points d'affixes respectives : z, 1 et 2. On suppose que M est distinct des points A et B.

a. Interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z-2}{z-1}$.

b. Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).

4. a. Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = \text{i},$$

où n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\dfrac{3}{2}$.

b. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(3) \quad \left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = \text{i}.$$

On cherchera les solutions sous forme algébrique.

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle ABCD tel que AB $= \sqrt{2}$, AD $=$ 1; $(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}})$ est un angle droit direct; I désigne le milieu de [AB].
A. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que $M\text{D}^2 - M\text{B}^2 = 1$.

1. Vérifier que les points C et I appartiennent à $\mathscr{E}$.
2. **a.** Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$.
b. En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

B. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(\text{A}\,;\ \vec{u},\ \vec{v})$ avec $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\text{AD}}$.
Soit S une similitude directe qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', telle que $z' = az + b$, a et b étant des nombres complexes, avec $a \neq 0$.

1. Déterminer les nombres a et b pour que S(D) = C et S(C) = B.
2. Soit T la similitude directe qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = -\frac{\text{i}\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}.$$

Déterminer le rapport et l'angle de T.
3. Montrer que la similitude T transforme B en I.
4. En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI).
5. Montrer que le centre Ω de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).

Problème **10 points**

Les tracés des courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).
On rappelle qu'une fonction f est majorée par une fonction g (ce qui signifie aussi que g est minorée par f) sur un intervalle I si et seulement si, pour tout x appartenant à I, $f(x) < g(x)$.

PARTIE A

Soit f et g les fonctions définies sur $[0\,;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) \text{ et } g(x) = \frac{2x}{1+x}.$$

On notera $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f et Γ celle de g.
On se propose de démontrer que f est minorée par g sur $[0\,;\ +\infty[$.
Soit h la fonction définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Étudier le sens de variation de h sur $[0\,;\ +\infty[$; calculer $h(0)$.
(L'étude de la limite de h en $+\infty$ n'est pas demandée.)

2. En déduire que pour tout réel x positif ou nul,

$$(1) \qquad \frac{2x}{x+2} < \ln(1+x).$$

3. Construire dans le même repère les courbes $\mathscr{C}$ et Γ et montrer qu'elles admettent en 0 une même tangente D que l'on tracera. (On justifiera rapidement le tracé de ces courbes.)

PARTIE B

k désignant un réel strictement positif, on se propose de déterminer toutes les fonctions linéaires $x \mapsto kx$, majorant la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0 ; +\infty[$.
Soit f_k la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$.

1. Étudier le sens de variation de f_1, définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1(x) = \ln(1+x) - x$.
2. Étudier la limite de f, en $+\infty[$ et donner la valeur de f_1 en 0.
3. Montrer que pour tout réel x positif ou nul
   (2) $\qquad \ln(1+x) \leqslant x$.
4. En déduire que si $k \geqslant 1$ alors : pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant kx$.
5. Le réel k vérifie les conditions : $0 < k < 1$.
   Montrer que la dérivée de f_k s'annule pour $x = \dfrac{1-k}{k}$ et étudier le sens de variation de f_k.
   (L'étude de la limite de f_k en $+\infty$ n'est pas demandée.)
6. En déduire les valeurs de k strictement positives telles que pour tout
   $x \geqslant 0$, $f(x) < kx$.

PARTIE C

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

   (On remarquera éventuellement que : $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$.
   En déduire le calcul de $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 (x - \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ puis de $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^1 \left[\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}\right]\,\mathrm{d}x$.
   (Pour le calcul de K on pourra vérifier que : $\dfrac{2x}{x+2} = 2 - \dfrac{4}{2+x}$.)
   Interpréter géométriquement les valeurs des intégrales J et K en utilisant les courbes $\mathscr{C}$, Γ et la droite D obtenues dans la partie **A**.
2. Soit u la fonction définie sur $[0 ; 1]$ de la façon suivante :

$$u(0) = 1 \text{ et si } x \neq 0,\ u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

   a. Démontrer que la fonction u est dérivable sur $]0 ; 1]$.
   b. On admet que u est dérivable sur $[0 ; 1\,]$ et on pose :

$$\mathrm{L} = \int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x.$$

   En utilisant les inégalités (1) et (2) obtenues dans les parties **A** et **B**, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{2}{x+2}\,\mathrm{d}x < L < 1.$$

   En déduire une valeur approchée de L à 10^{-1} près.