Baccalauréat mathématiques Métropole juin 1957

I. 1er sujet *Géométrie descriptive* :

1. Un plan, non parallèle à la ligne de terre, est défini par sa trace horizontale $\mathrm{P}(p, p')$ et sa trace frontale Q (q, q') (p' et q sont portées par la ligne de terre).
   Construire l'angle des droites P et Q.
2. Connaissant la trace horizontale P d'un plan et l'angle aigu de P et de la trace frontale Q de ce plan, construire Q. (La discussion n'est pas demandée.)

I. 2e sujet
Tangentes à une parabole, issues d'un point de sa directrice.
Application : Étant donné un triangle OAB rectangle en O, construire la parabole tangente en A et B respectivement aux droites OA et OB.

I. 3e sujet
Faisceau harmonique de droites.
Polaire d'un point par rapport à deux droites.

II.

Dans un plan fixe, on considère l'ellipse variable (E) qui admet le point F$'$ donné pour foyer, la longueur $2a$ donnée pour longueur de son grand axe et qui passe par un point donné C.
On pose $\mathrm{F'C} = \lambda a$ $(0 < \lambda < 2)$.

1. Quel est le lieu du second foyer F de (E) ?
2. Sur le cercle (C), de centre C et de rayon $(2 - \lambda)a$, on considère le point U tel que $\mathrm{F'U} = 2a$.
   Soit (D) la directrice de (E) relative à F.
   Montrer que (D) porte le pôle de la droite UF par rapport à (C).
3. Construire le pôle G de (D) par rapport à (C) et préciser le lieu de ce point quand (E) varie.
4. Quel est le lieu du point H, projection orthogonale de C sur (D) ?
   Quelle est l'enveloppe (Γ) de (D) ?
   Discuter la nature de (Γ) suivant la valeur attribuée à λ $(0 < \lambda < 2)$.

Baccalauréat mathématiques et technique Métropole juin 1957

I. 1er sujet

Produit de deux homothéties.

I. 2e sujet

Tracé de l'ellipse avec la bande de papier.

I. 3e sujet

Section d'un cône de révolution par un plan parallèle à un plan tangent.

II.

Dans un plan fixe, on considère : un axe orienté fixe $x'\text{O}x$, O étant l'origine des abscisses ; O′ et O″ les points de cet axe tels que $\overline{\text{OO}'} = \text{R}$, $\overline{\text{OO}''} = -\text{R}$, R étant un nombre positif constant ; (C), le cercle de diamètre O′O″ ; (C′), le cercle de centre O′, de rayon $\dfrac{\text{R}}{2}$; S et S′, respectivement les centres d'homothétie directe et inverse de (C) et (C′).
On appelle A un point de $x'\text{O}x$, d'abscisse variable x ; $p[\text{A}, (\text{C})]$ la puissance de A par rapport à (C) ; $p[\text{A}, (\text{C}')]$ la puissance de A par rapport à (C′).

1. **a.** Calculer $p[\text{A}, (\text{C})]$ et $p[\text{A}, (\text{C}')]$ en fonction de R et de x.
   Étudier les variations de la fonction $y = f(x)$, définie par

   $$f(x) = \frac{p[\text{A}, (\text{C}')]}{p[\text{A}, (\text{C})]}$$

   Construire la courbe représentative Γ des variations de y dans le système d'axes rectangulaires Oz, Oy.

   b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ avec les axes de coordonnées et avec l'asymptote de Γ parallèle à l'axe Oz.
   Calculer les abscisses de S et S′ en fonction de R.
   Quelles sont les valeurs de $f(x)$ correspondant aux positions S et S′ du point A ?
   Expliquer géométriquement les résultats obtenus.

2. Soit, maintenant, A un point de $x'\text{O}x$ tel qu'il existe des tangentes (T) et (T′) à (C′) issues de ce point et sécantes à (C).
   Montrer que la valeur correspondante de x vérifie l'une des inégalités $x \geqslant a_1$, $x \leqslant a_2$.
   On précisera les positions de A correspondant respectivement à $x = a_1$ et à $x = a_2$.
   On appelle : M et P, les points d'intersection de (T) avec (C) ; M′ et P′, les points d'intersection de (T′) avec (C), M et M′ étant symétriques par rapport à $x'\text{O}x$; B, le point commun à MP′ et M′P.
   Montrer que les points A et B divisent harmoniquement le segment O′O″.
   Calculer l'abscisse de B en fonction de R et de x.
   Quelles sont les bissectrices des angles formés par les droites MA et MB ?
   À quelle courbe restent tangentes les droites MP′ et M′P lorsque x prend toutes les valeurs telles que $x \geqslant a_1$ ou $x \leqslant a_2$?
   On délimitera avec soin les portions de l'enveloppe de MP′ et M′P qui correspondent respectivement à $x \geqslant a_1$ et à $x \leqslant a_2$

3. Soient Q, un point variable sur (C), (D), la polaire de Q par rapport à (C'), H, la projection orthogonale de Q sur (D).
   Trouver le lieu (Δ) de H ; préciser la position de (Δ) par rapport à (C) et (C').
   À quelle courbe la droite (D) reste-t-elle tangente quand Q décrit (C) ?

N. B. - Les trois parties du problème sont indépendantes.