

♻ Baccalauréat Métropole juin 1957 ♻
Série mathématiques

I. 1^{er} sujet *Géométrie descriptive :*

1. Un plan, non parallèle à la ligne de terre, est défini par sa trace horizontale $P(p, p')$ et sa trace frontale $Q(q, q')$ (p' et q sont portées par la ligne de terre).
Construire l'angle des droites P et Q .
2. Connaissant la trace horizontale P d'un plan et l'angle aigu de P et de la trace frontale Q de ce plan, construire Q . (La discussion n'est pas demandée.)

I. 2^e sujet

Tangentes à une parabole, issues d'un point de sa directrice.

Application : Étant donné un triangle OAB rectangle en O , construire la parabole tangente en A et B respectivement aux droites OA et OB .

I. 3^e sujet

Faisceau harmonique de droites.

Polaire d'un point par rapport à deux droites.

II.

Dans un plan fixe, on considère l'ellipse variable (E) qui admet le point F' donné pour foyer, la longueur $2a$ donnée pour longueur de son grand axe et qui passe par un point donné C .
On pose $F'C = \lambda a$ ($0 < \lambda < 2$).

1. Quel est le lieu du second foyer F de (E) ?
2. Sur le cercle (C) , de centre C et de rayon $(2 - \lambda)a$, on considère le point U tel que $F'U = 2a$.
Soit (D) la directrice de (E) relative à F .
Montrer que (D) porte le pôle de la droite UF par rapport à (C) .
3. Construire le pôle G de (D) par rapport à (C) et préciser le lieu de ce point quand (E) varie.
4. Quel est le lieu du point H , projection orthogonale de C sur (D) ?
Quelle est l'enveloppe (Γ) de (D) ?
Discuter la nature de (Γ) suivant la valeur attribuée à λ ($0 < \lambda < 2$).

♻ Baccalauréat mathématiques et technique Métropole ♻
juin 1957

I. 1^{er} sujet

Produit de deux homothéties.

I. 2^e sujet

Tracé de l'ellipse avec la bande de papier.

I. 3^e sujet

Section d'un cône de révolution par un plan parallèle à un plan tangent.

II.

Dans un plan fixe, on considère : un axe orienté fixe $x'Ox$, O étant l'origine des abscisses; O' et O'' les points de cet axe tels que $\overline{OO'} = R$, $\overline{OO''} = -R$, R étant un nombre positif constant; (C) , le cercle de diamètre $O'O''$; (C') , le cercle de centre O' , de rayon $\frac{R}{2}$; S et S' , respectivement les centres d'homothétie directe et inverse de (C) et (C') .

On appelle A un point de $x'Ox$, d'abscisse variable x ; $p[A, (C)]$ la puissance de A par rapport à (C) ; $p[A, (C')]$ la puissance de A par rapport à (C') .

1. a. Calculer $p[A, (C)]$ et $p[A, (C')]$ en fonction de R et de x .

Étudier les variations de la fonction $y = f(x)$, définie par

$$f(x) = \frac{p[A, (C')]}{p[A, (C)]}$$

Construire la courbe représentative Γ des variations de y dans le système d'axes rectangulaires Oz, Oy .

- b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ avec les axes de coordonnées et avec l'asymptote de Γ parallèle à l'axe Oz .

Calculer les abscisses de S et S' en fonction de R .

Quelles sont les valeurs de $f(x)$ correspondant aux positions S et S' du point A ?

Expliquer géométriquement les résultats obtenus.

2. Soit, maintenant, A un point de $x'Ox$ tel qu'il existe des tangentes (T) et (T') à (C') issues de ce point et sécantes à (C) .

Montrer que la valeur correspondante de x vérifie l'une des inégalités $x \geq a_1$, $x \leq a_2$.

On précisera les positions de A correspondant respectivement à $x = a_1$ et à $x = a_2$.

On appelle : M et P , les points d'intersection de (T) avec (C) ; M' et P' , les points d'intersection de (T') avec (C) , M et M' étant symétriques par rapport à $x'Ox$; B , le point commun à MP' et $M'P$.

Montrer que les points A et B divisent harmoniquement le segment $O'O''$.

Calculer l'abscisse de B en fonction de R et de x .

Quelles sont les bissectrices des angles formés par les droites MA et MB?

À quelle courbe restent tangentes les droites MP' et $M'P$ lorsque x prend toutes les valeurs telles que $x \geq a_1$ ou $x \leq a_2$?

On délimitera avec soin les portions de l'enveloppe de MP' et $M'P$ qui correspondent respectivement à $x \geq a_1$ et à $x \leq a_2$.

3. Soient Q, un point variable sur (C), (D), la polaire de Q par rapport à (C'), H, la projection orthogonale de Q sur (D).

Trouver le lieu (Δ) de H; préciser la position de (Δ) par rapport à (C) et (C').

À quelle courbe la droite (D) reste-t-elle tangente quand Q décrit (C)?

N. B. - Les trois parties du problème sont indépendantes.