Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat C Métropole septembre 1969 ∾
Deuxième session de remplacement

Le candidat doit traiter LES DEUX EXERCICES et LE PROBLÈME

1ER EXERCICE

Soit (C) la courbe représentative de la fonction

$$y = a^x \qquad (a > 1)$$

dans un repère orthonormé.

1. Écrire la dérivée de a^x.
   Donner une primitive de a^x.
2. On donne les quatre points suivants par leurs coordonnées :

$$\mathrm{H}(x\,;\,0),\quad \mathrm{H}'(x'\,;\,0),\quad \mathrm{M}\left(x\,;\,a^x\right),\quad \mathrm{M}'\left(x'\,;\,a^{x'}\right),$$

   où x et x' sont deux nombres réels arbitraires.
   a. Calculer l'aire, A, du domaine plan limité par les segments HH′, HM, H′M′ et par l'arc MM′ de la courbe (C).
   b. On suppose maintenant que H′ se trouve sur la tangente en M à (C).
   Calculer x' et l'aire A en fonction de x.
   Calculer l'aire, B, du triangle HH′M.
   Vérifier que $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ a alors une valeur indépendante de x et de a.

2E EXERCICE

On convient de dire qu'un polynôme f possède la propriété (P) si ses coefficients sont des entiers relatifs et si $f(x)$ est divisible par 5 pour toute valeur entière (positive, négative ou nulle) attribuée à x.

1. Montrer que f possède la propriété (P) si $f(x)$ est congru à 0, modulo 5, pour tout x pris dans l'ensemble

$$E = \{-2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2\}.$$

   Montrer que $g(x) = x^5 - x$ possède la propriété (P).
2. Déterminer tous les polynômes h définis par

$$h(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

   qui possèdent la propriété (P).
   On pourra commencer par chercher les polynômes h dont les coefficients sont pris dans l'ensemble E défini plus haut.

PROBLÈME

Dans un plan, on donne une origine, O, trois points, P, Q et R, distincts, et trois points, A, B et C, distincts et non alignés.
À tout point M du plan on associe le couple de nombres réels $(x\,;\,y)$ défini par

$$\overrightarrow{\text{AM}} = x\overrightarrow{\text{AB}} + y\,\overrightarrow{\text{AC}}.$$

On appelle $\mathscr{L}$ la transformation qui, à tout point $\text{M}(x\,;\,y)$ du plan, fait correspondre le point $\text{M}' = \mathscr{L}(\text{M})$ défini par

$$\overrightarrow{\text{MM}'} = (1 - x - y)\overrightarrow{\text{OP}} + x\overrightarrow{\text{OQ}} + y\overrightarrow{\text{OR}}.$$

1. On appelle A′, B′ et C′ les transformés respectifs de A, B et C par $\mathscr{L}$.
   Établir les relations

$$\overrightarrow{\text{OA}'} = \overrightarrow{\text{OP}} + \overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}'} = \overrightarrow{\text{OQ}} + \overrightarrow{\text{OB}},\ \overrightarrow{\text{OC}'} = \overrightarrow{\text{OR}} + \overrightarrow{\text{OC}}.$$

2. De quels coefficients faut-il affecter A, B et C pour que leur barycentre soit $\text{M}(x\,;\,y)$?
   Montrer que $\text{M}' = \mathscr{L}(\text{M})$ est le barycentre de A′, B′ et C′ affectés des mêmes coefficients.
   Quelle condition les milieux des segments AP, BQ et CR doivent-ils vérifier pour que la transformation $\mathscr{L}$ soit bijective ?
   Cette condition sera supposée réalisée dans toute la suite.
3. Quelle est la transformée par $\mathscr{L}$ d'une droite D du plan ? (On pourra définir D par son équation dans un repère convenablement choisi.)
4. **a.** On suppose O, P, Q et R non alignés ; on définit deux nombres réels, u et v, par

$$\overrightarrow{\text{PO}} = u\overrightarrow{\text{PQ}} + v\overrightarrow{\text{PR}}.$$

   Déterminer les points invariants éventuels dans $\mathscr{L}$.

   b. On suppose O, P, Q et R alignés ; montrer qu'il existe une droite, (Δ) de points invariants et que AM et A′M′ se coupent en général sur (Δ).
   Quelle est la nature de $\mathscr{L}$ dans le cas où la droite PQ n'est pas parallèle à (Δ) ?

   c. Est-il possible que $\mathscr{L}$ n'admette aucun point invariant ?