Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe 2 [1] juin 1994

EXERCICE 1 **4 points**

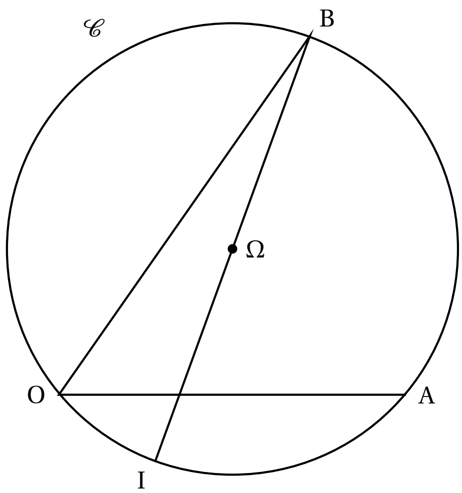
Enseignement de spécialité

Sur la figure ci-jointe, qui sera remise avec la copie avoir été éventuellement complétée, O, A et B sont trois points du plan orienté tels que :

$$\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,,\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{modulo } 2\pi.$$

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O, est le cercle circonscrit au triangle OAB. On désigne par I le point diamétralement opposé à B sur C.

1. On appelle s la similitude directe de centre I qui transforme A en B.
   Déterminer l'angle de la similitude s.
   Quelle est la nature du triangle IAB ?
   En déduire le rapport de la similitude s.
2. On appelle G le point défini par la relation $\overrightarrow{\text{GA}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{GB}}$. La droite (IG) recoupe $\mathscr{C}$ en K. On appelle s' la similitude directe de centre K qui transforme A en B.
   a. Déterminer l'angle de la similitude s'.
   b. On se propose de déterminer le rapport de la similitude s'.
   Montrer l'égalité $\overrightarrow{\text{KA}} \cdot \overrightarrow{\text{KB}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\text{KA} \cdot \text{KB}$.
   On désigne par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BK).
   Exprimer $\overrightarrow{\text{KH}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{KB}}$.
   En déduire $\overrightarrow{\text{KA}} \cdot \overrightarrow{\text{KB}} = -\frac{1}{2}\text{KB}^2$.
   Déterminer le rapport de la similitude s'.



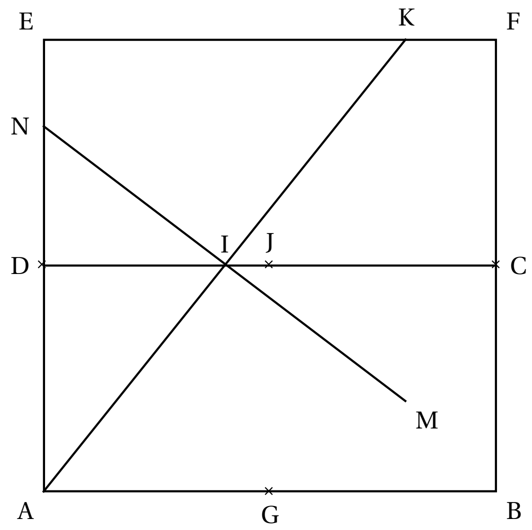
EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère le carré ABFE de centre J, tel que :

1. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes

AB = AE = 2 et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π. Soient D, C et G les milieux respectifs de [AE], [BF] et [AB].



Soit I un point quelconque de [DC]. La droite (AI) coupe la droite (EF) en K. La perpendiculaire en I à la droite (AI) coupe la droite (AE) en N.
On désigne par M le symétrique de N par rapport au point I.
On se propose de déterminer et de tracer l'ensemble P_1 des points M obtenus lorsque I décrit le segment [DC].

1. **a.** Préciser les positions de M lorsque I est en D puis en J.
   b. Quelle est la nature du quadrilatère AMKN ?
   c. En déduire que MA = MK et que K est le projeté orthogonal de M sur la droite (EF).
   d. Montrer que P_1 est inclus dans une parabole P dont on précisera le foyer et la directrice.
2. On munit le plan du repère orthonormé (A, AG, AD).
   a. Donner une équation cartésienne de P.'
   Préciser l'ensemble des abscisses de M quand I décrit [DC] et donner les coordonnées des extrémités de P_1. Tracer P_1.

PROBLÈME **10 points**

La partie A a pour objet l'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}.$$

Les parties B et C sont consacrées aux études des convergences de deux suites liées à f.

Partie A

Étude de la fonction *f*

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1. **a.** Étudier le sens de variations de g. Calculer $g(0)$.
   b. En déduire que l'expression $\dfrac{e^x}{e^x - x}$ est définie pour tout réel x.
   On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$.

2. **a.** Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) > 0$.

   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{1 - x\mathrm{e}^{-x}}$.

   b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4. Déterminer la dérivée f' de f et étudier les variations de f.

5. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

Partie B

Étude de la suite (u_n) définie par pour tout entier naturel n, $u_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$

On ne cherchera pas à calculer explicitement u_n.

1. Donner une interprétation géométrique de u_n.

2. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

3. **a.** Montrer que, pour tout réel x,

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}$$

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = n + \int_0^n \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}\,\mathrm{d}x.$$

   c. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C

Étude de la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - n$

On a donc, pour tout entier naturel n, $v_n = \displaystyle\int_0^n \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}\,\mathrm{d}x$.

On se propose d'étudier la convergence de la suite (v_n).

1. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\mathrm{e}^x - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

   c. En effectuant une intégration par parties, exprimer $\displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de n.

   d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 2$.

3. La suite (v_n) est-elle convergente ?