

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Métropole groupe 1¹ juin 1994 ∞

EXERCICE 1

4 points

Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . On pose $\vec{OA} = \vec{i}$ et $\vec{OB} = 2\vec{j}$.

1. Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x; y)$. On pose :

$$d_1 = \det(\vec{MA}, \vec{MB}); d_2 = \det(\vec{MB}, \vec{MO}); d_3 = \det(\vec{MO}, \vec{MA}).$$

- a. Calculer d_1, d_2, d_3 en fonction de x et y et prouver que $d_1 + d_2 + d_3 \neq 0$.
b. En déduire la relation :

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(d_2\vec{OA} + d_3\vec{OB}) \quad (1)$$

2. Soit I le point tel que $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ et α un réel strictement positif.

On suppose que M est le barycentre du système de points pondérés $\{(O, \alpha), (A, 1), (B, 2)\}$.

- a. Démontrer que M appartient au segment $[OI]$.
b. Exprimer \vec{OM} en fonction de \vec{OA}, \vec{OB} et α .
En déduire en utilisant la relation (1) que $d_3 = 2d_2$ et $d_1 = \alpha d_2$.
c. Démontrer que :
Aire $(MAB) = \alpha \times$ Aire (MOB) et Aire $(MOA) = 2 \times$ Aire (MOB) .

EXERCICE 1

4 points

Enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit α un nombre réel positif, on considère l'application F_α qui à tout point m d'affixe $z = x + iy$ associe M_α d'affixe $Z_\alpha = (z + i)(\alpha z - 1)$.

1. On donne $\alpha = 0$, reconnaître l'application F_0 .
2. On prend maintenant α strictement positif.
a. Déterminer les points ayant pour image par F_α le point O .
b. Calculer les coordonnées X_α et Y_α de M_α en fonction de x, y et α .
c. Pour $\alpha \neq 1$, montrer que l'ensemble des points dont l'image est un point de l'axe imaginaire (O, \vec{v}) est une hyperbole.
Calculer son excentricité, les coordonnées de son centre et préciser, suivant les valeurs de α , son axe focal.
3. Faire une figure correspondant à $\alpha = \frac{1}{2}$.

PROBLÈME

12 points

Le plan est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique : 4 cm).
Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par

1. Amiens, Lille, Rouen, Paris-Créteil-Versailles

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1).$$

On appelle Γ sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

PARTIE A

Étude de la fonction f

1. Déterminer le sens de variations de la fonction f .
2. Déterminer les limites de f en 1 et $+\infty$.
3. **a.** Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[\sqrt{2}; +\infty[: f(x) \geq x$.
b. Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $h(x) = 2x - f(x)$.
 À partir du sens de variation de h , démontrer que h est positive.
c. Dédire des questions précédentes que, pour tout x de l'intervalle $[\sqrt{2}; +\infty[:$

$$x \leq f(x) \leq 2x$$

4. **a.** Calculer $f(x)$ à 10^{-2} près, pour $x = 1 + \frac{k}{10}$, où k est un entier variant de 1 à 10.
b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution que l'on notera λ et justifier le fait que : $\lambda \in]1, 1; 1, 2[$.
 Tracer les droites d'équation $x = 1$, $y = x$ et $y = 2$, puis la courbe Γ .

Partie B

Approximation de λ par une suite

On rappelle que λ est l'unique solution de $f(x) = 0$.

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \sqrt{1 + e^{-x}}.$$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $x = g(x)$.
2. **a.** Soit I l'intervalle $]1; 2[$; démontrer que pour tout x de I , $g(x) \in I$.
b. Démontrer que, pour tout x de I , $0 \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{2e} \leq \frac{1}{5}$.
c. En déduire que pour tout x de I , $|g(x) - \lambda| \leq \left(\frac{1}{5}\right)|x - \lambda|$.
3. n étant un entier naturel, soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1, 1 \\ u_{n+1} &= g(u_n) \end{cases} \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Il résulte de la question 2. a. que pour tout n de \mathbb{N} , $u_n \in I$.

- a.** Établir que pour tout $n \geq 0$, $|u_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$.
- b.** Conclure à la convergence de (u_n) , préciser sa limite et déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée de λ à 10^{-4} près.

PARTIE C**Calcul de la limite d'une intégrale**

λ désigne toujours l'unique solution de $f(x) = 0$.

Soit H la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$H(x) = \int_{\lambda}^x f(t) dt.$$

1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties,

$$J(x) = \int_{\lambda}^x \ln(t-1) dt.$$

(On pourra écrire $\frac{t}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1}$).

2. Vérifier que la fonction $t \mapsto (t+1)\ln(t+1) - t$ est une primitive de $t \mapsto \ln(t+1)$, puis calculer $H(x)$.
3. On rappelle que λ vérifie $f(\lambda) = 0$. Démontrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} H(x) = \frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda + \ln \frac{\lambda-1}{\lambda+1} + 2\ln 2 - \frac{3}{2}.$$