Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe 1 [1] juin 1994

EXERCICE 1 **4 points**

Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On pose $\overrightarrow{\text{OA}} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{\text{OB}} = 2\vec{\jmath}$.

1. Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\ y)$. On pose :

$$d_1 = \det\left(\overrightarrow{M\text{A}},\ \overrightarrow{M\text{B}}\right)\ ;\ d_2 = \det\left(\overrightarrow{M\text{B}},\ \overrightarrow{M\text{O}}\right)\ ;\ d_3 = \det\left(\overrightarrow{M\text{O}},\ \overrightarrow{M\text{A}}\right).$$

a. Calculer $d_1,\ d_2,\ d_3$ en fonction de x et y et prouver que $d_1 + d_2 + d_3 \neq 0$.

b. En déduire la relation :

$$\overrightarrow{\text{O}M} = \frac{1}{2}\left(d_2\overrightarrow{\text{OA}} + d_3\overrightarrow{\text{OB}}\right) \qquad (1)$$

2. Soit I le point tel que $\overrightarrow{\text{AI}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{AB}}$ et α un réel strictement positif.

On suppose que M est le barycentre du système de points pondérés $\{(\text{O},\ \alpha),\ (\text{A},\ 1),\ (\text{B},\ 2)\}$.

a. Démontrer que M appartient au segment [OI].

b. Exprimer $\overrightarrow{\text{O}M}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{OA}}$, $\overrightarrow{\text{OB}}$ et α.

En déduire en utilisant la relation (1) que $d_3 = 2d_2$ et $d_1 = \alpha d_2$.

c. Démontrer que :

Aire $(M\text{AB}) = \alpha\times$ Aire $(M\text{OB})$ et Aire $(M\text{OA}) = 2\times$ Aire $(M\text{OB})$.

EXERCICE 1 **4 points**

Enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Soit α un nombre réel positif, on considère l'application F_α qui à tout point m d'affixe $z = x + \text{i}y$ associe M_a d'affixe $Z_\alpha = (z+\text{i})(\alpha z - 1)$.

1. On donne $\alpha = 0$, reconnaître l'application F_0.

2. On prend maintenant α strictement positif.

a. Déterminer les points ayant pour image par F_α le point O.

b. Calculer les coordonnées X_α et Y_α de M_α en fonction de x, y et α.

c. Pour $\alpha \neq 1$, montrer que l'ensemble des points dont l'image est un point de l'axe imaginaire $\left(\text{O},\ \vec{v}\right)$ est une hyperbole.

Calculer son excentricité, les coordonnées de son centre et préciser, suivant les valeurs de a, son axe focal.

3. Faire une figure correspondant à $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

1. Amiens, Lille, Rouen, Paris-Créteil-Versailles

PROBLÈME **12 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 4 cm).
Soit f la fonction définie sur $]1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln\left(x^2 - 1\right).$$

On appelle Γ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

PARTIE A

Étude de la fonction f

1. Déterminer le sens de variations de la fonction f.

2. Déterminer les limites de f en 1 et $+\infty$.

3. **a.** Démontrer que pour tout x de l'intervalle $\left[\sqrt{2}~;~+\infty\right[$: $f(x) \geqslant x$.

b. Soit h la fonction définie sur $]1~;~+\infty[$ par $h(x) = 2x - f(x)$.
À partir du sens de variation de h, démontrer que h est positive.

c. Déduire des questions précédentes que, pour tout x de l'intervalle $\left[\sqrt{2}~;~+\infty\right[$:

$$x \leqslant f(x) \leqslant 2x$$

4. **a.** Calculer $f(x)$ à 10^{-2} près, pour $x = 1 + \dfrac{k}{10}$, où k est un entier variant de 1 à 10.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution que l'on notera λ et justifier le fait que : $\lambda \in]1,1~;~1,2[$.
Tracer les droites d'équation $x = 1,~ y = x$ et $y = 2$, puis la courbe Γ.

Partie B

Approximation de λ par une suite

On rappelle que λ est l'unique solution de $f(x) = 0$.
Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \sqrt{1 + \text{e}^{-x}}.$$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $x = g(x)$.

2. **a.** Soit I l'intervalle $]1~;2[$; démontrer que pour tout x de I, $g(x) \in \text{I}$.

b. Démontrer que, pour tout x de I, $0 \leqslant |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2\text{e}} \leqslant \dfrac{1}{5}$.

c. En déduire que pour tout x de I, $|g(x) - \lambda| \leqslant \left(\dfrac{1}{5}\right)|x - \lambda|$.

3. n étant un entier naturel, soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\left\{\begin{array}{l c l}u_0 & = & 1,1\\ u_{n+1} & = & g\left(u_n\right)\end{array}\right. \qquad \text{pour } n \geqslant 0.$$

Il résulte de la question 2. a. que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in \text{I}$.

a. Établir que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n - \lambda| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$.

b. Conclure à la convergence de (u_n), préciser sa limite et déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée de λ à 10^{-4} près.

PARTIE C

Calcul de la limite d'une intégrale

λ désigne toujours l'unique solution de $f(x) = 0$.
Soit H la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$H(x) = \int_{\lambda}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties,

$$J(x) = \int_{\lambda}^{x} \ln(t-1)\,\mathrm{d}t.$$

$\left(\text{On pourra écrire } \dfrac{t}{t-1} = 1 + \dfrac{1}{t-1}\right)$.

2. Vérifier que la fonction $t \longmapsto (t+1)\ln(t+1) - t$ est une primitive de $t \longmapsto \ln(t+1)$, puis calculer $H(x)$.

3. On rappelle que λ vérifie $f(\lambda) = 0$. Démontrer que :

$$\lim_{x \to 1} H(x) = \frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda + \ln\frac{\lambda-1}{\lambda+1} + 2\ln 2 - \frac{3}{2}.$$