Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe 2 [1] juin 1994

Exercice 1 **4 points**

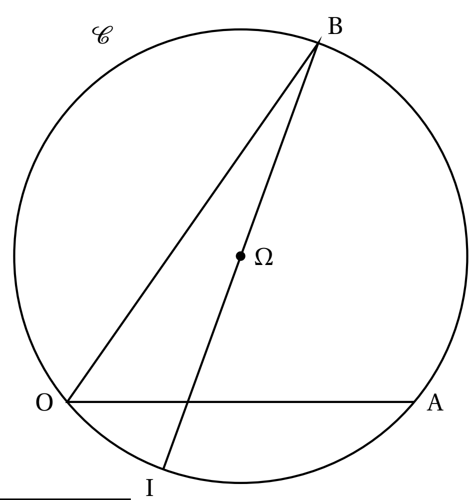
Enseignement de spécialité

Sur la figure ci-jointe, qui sera remise avec la copie avoir été éventuellement complétée, O, A et B sont trois points du plan orienté tels que :

$$\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{modulo } 2\pi.$$

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O, est le cercle circonscrit au triangle OAB. On désigne par I le point diamétralement opposé à B sur C.

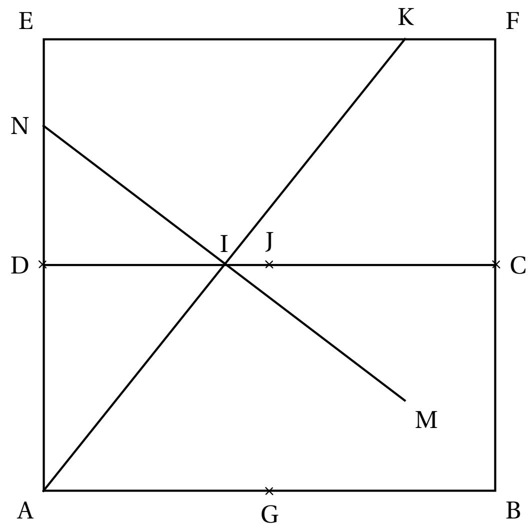
1. On appelle s la similitude directe de centre I qui transforme A en B.
   Déterminer l'angle de la similitude s.
   Quelle est la nature du triangle IAB ?
   En déduire le rapport de la similitude s.
2. On appelle G le point défini par la relation $\overrightarrow{\text{GA}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{GB}}$. La droite (IG) recoupe $\mathscr{C}$ en K. On appelle s' la similitude directe de centre K qui transforme A en B.
   a. Déterminer l'angle de la similitude s'.
   b. On se propose de déterminer le rapport de la similitude s'.
   Montrer l'égalité $\overrightarrow{\text{KA}} \cdot \overrightarrow{\text{KB}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\text{KA} \cdot \text{KB}$.
   On désigne par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BK).
   Exprimer $\overrightarrow{\text{KH}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{KB}}$.
   En déduire $\overrightarrow{\text{KA}} \cdot \overrightarrow{\text{KB}} = -\frac{1}{2}\text{KB}^2$.
   Déterminer le rapport de la similitude s'.



1. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère le carré ABFE de centre J, tel que :
$AB = AE = 2$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π. Soient D, C et G les milieux respectifs de [AE], [BF] et [AB].



Soit I un point quelconque de [DC]. La droite (AI) coupe la droite (EF) en K. La perpendiculaire en I à la droite (AI) coupe la droite (AE) en N.
On désigne par M le symétrique de N par rapport au point I.
On se propose de déterminer et de tracer l'ensemble P_1 des points M obtenus lorsque I décrit le segment [DC].

1. **a.** Préciser les positions de M lorsque I est en D puis en J.
   b. Quelle est la nature du quadrilatère AMKN ?
   c. En déduire que MA = MK et que K est le projeté orthogonal de M sur la droite (EF).
   d. Montrer que P_1 est inclus dans une parabole P dont on précisera le foyer et la directrice.
2. On munit le plan du repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AD}\right)$.
   a. Donner une équation cartésienne de P.
   Préciser l'ensemble des abscisses de M quand I décrit [DC] et donner les coordonnées des extrémités de P_1. Tracer P_1.

PROBLÈME **10 points**

La partie A a pour objet l'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}.$$

Les parties B et C sont consacrées aux études des convergences de deux suites liées à f.

Partie A

Étude de la fonction f

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1. **a.** Étudier le sens de variations de g. Calculer $g(0)$.

   b. En déduire que l'expression $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}$ est définie pour tout réel x.

   On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}$.

2. **a.** Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) > 0$.

   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{1 - x\mathrm{e}^{-x}}$.

   b. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4. Déterminer la dérivée f' de f et étudier les variations de f.
5. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

Partie B

Étude de la suite (u_n) définie par pour tout entier naturel n, $u_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$

On ne cherchera pas à calculer explicitement u_n.

1. Donner une interprétation géométrique de u_n.
2. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
3. **a.** Montrer que, pour tout réel x,

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}$$

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = n + \int_0^n \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}\,\mathrm{d}x.$$

   c. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C

Étude de la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - n$

On a donc, pour tout entier naturel n, $v_n = \displaystyle\int_0^n \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}\,\mathrm{d}x$.
On se propose d'étudier la convergence de la suite (v_n).

1. Montrer que la suite (v_n) est croissante.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\mathrm{e}^x - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

   c. En effectuant une intégration par parties, exprimer $\displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de n.

   d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 2$.

3. La suite (v_n) est-elle convergente ?