Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe 3 [1] juin 1994

EXERCICE 1 **4 points**

Enseignement obligatoire

Une urne contient sept boules, cinq noires et deux rouges, indiscernables au toucher.

1. On extrait simultanément deux boules de l'urne. Déterminer les probabilités des évènements suivants : A : les deux boules tirées sont rouges ; B : les deux boules tirées sont de même couleur.
2. De la même urne, on extrait cette fois-ci les sept boules, l'une après l'autre. Il y a donc $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ tirages possibles. 20 Déterminer successivement le nombre de tirages pour lesquels :
   - **a.** la première boule tirée est rouge ;
   - **b.** la première boule tirée est noire et la deuxième rouge ;
   - **c.** la première boule rouge tirée est en troisième position ;
   - **d.** la première boule rouge tirée est en quatrième position ;
   - **e.** la première boule rouge tirée est en cinquième position ;
   - **f.** la première boule rouge tirée est en sixième position.
3. Dans la situation de la question 2., on appelle X le rang de la première boule rouge tirée.
   - **a.** Donner la loi de probabilité de cette variable aléatoire X ; les valeurs $p_i = P(X = i)$ seront données sous forme de fractions.
   - **b.** Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X. On donnera le détail des calculs et les valeurs exactes.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Pour cet exercice, la figure est fournie afin de faciliter votre travail. Il est inutile de la refaire sur votre copie.

Toutefois, si vous introduisez dans vos raisonnements d'autres points que ceux de l'énoncé, veillez à les définir avec précision.

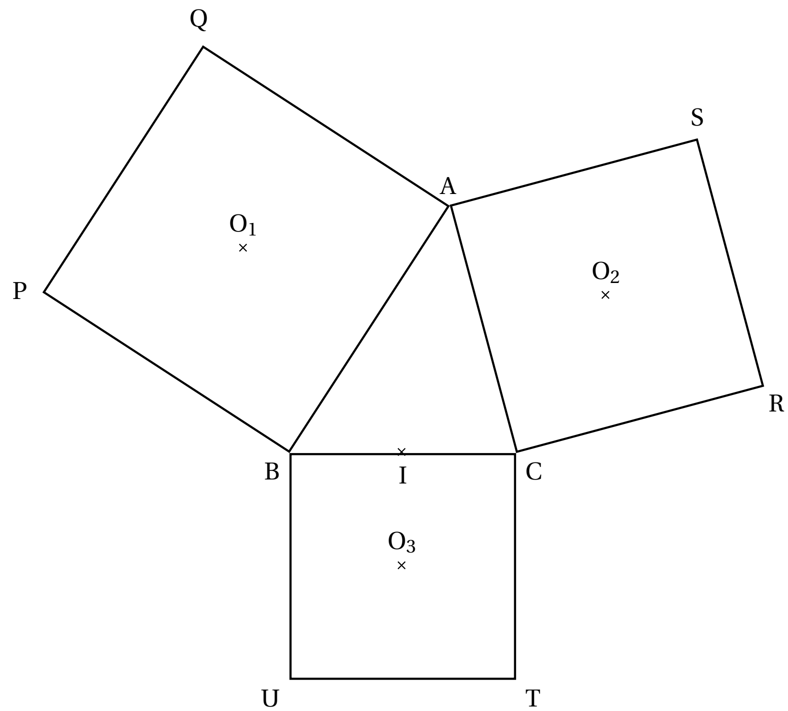
Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC, non rectangle, de sens direct.

À l'extérieur du triangle, conformément à la figure, on trace les carrés AQPB, ACRS et BUTC, de centres respectifs O_1, O_2, O_3.

On appelle $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les cercles circonscrits aux carrés AQPB et ACRS.

Enfin I est le milieu de [BC].

1. Besançon, Dijpon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg



Les trois questions sont indépendantes. Chacune vise à établir une propriété de la configuration.

1. Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en A et en un second point A$'$.
Montrer que A$'$ est sur le cercle de diamètre [BC]. (On pourra utiliser les propriétés angulaires relatives aux points cocycliques.)

2. Soient r_1 et r_2 les rotations de centres O_1 et O_2 et de même angle $\dfrac{\pi}{2}$.

- **a.** Quelle est la nature de $r_2 \circ r_1$?
- **b.** Quelle est l'image de B par $r_2 \circ r_1$?
- **c.** En déduire les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1$.
- **d.** Démontrer que le triangle IO_1O_2 est rectangle et isocèle. (On pourra utiliser le point J image de 1 par r_1.)

3.
- **a.** Quelle est l'image du triangle ABO_3 dans la similitude de centre B, de rapport $\sqrt{2}$ et d' angle $\dfrac{\pi}{4}$?
- **b.** Déterminer une similitude dans laquelle le triangle AO_1O_2 ait pour image le triangle AQC.
- **c.** Prouver que les segments $[AO_3]$ et $[O_1O_2]$ sont orthogonaux et de même longueur.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $I =]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 5 cm.

1. Étudier les variations de la fonction f et déterminer ses limites aux bornes de I. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une droite asymptote Δ que l'on précisera.
2. **a.** Écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en un point M de $\mathcal{C}$, d'abscisse a. On note T_a cette tangente.

   b. Montrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles la droite T_a passe par l'origine O.
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$. On mettra en évidence la droite Δ et les deux tangentes trouvées ci-dessus.
4. On pose, pour $x \in \mathrm{I}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

   La fonction F est-elle monotone ? Est-elle positive ?

Partie B

On pose $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
L'objet de cette partie est d'encadrer l'intégrale J. On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de J.

1. En utilisant l'étude de la fonction f réalisée dans la partie A, montrer que

$$1 \leqslant J \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2}.$$

2. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

   a. Calculer u_0.

   b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $u_{n+1} = (-1)^{n+1}\mathrm{e} + (n+1)u_n$.

   c. Calculer alors successivement $u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_6$. On donnera les réponses sous la forme $a\mathrm{e} - b$ avec a et b entiers naturels.
3. **a.** Montrer que :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

   b. En déduire que :

$$J = u_0 + u_1 + \cdots + R_n, \quad \text{avec } R_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   c. Prouver que :

$$\frac{1}{n+2} \leqslant |R_n| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2(n+2)}$$

4. **a.** Trouver le plus petit n entier tel que $\dfrac{\mathrm{e}}{2(n+2)} - \dfrac{1}{n+2} < 0,05$.

   b. Calculer $S6 = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$ sous la forme $a\mathrm{e} - b$ avec a et b entiers naturels.

   c. Prouver que $S_6 - \dfrac{\mathrm{e}}{16} \leqslant J \leqslant S_6 - \dfrac{1}{8}$.

   d. Déduire de ce qui précède un encadrement de J, d'amplitude inférieure à $0,05$ par deux nombres décimaux.