

Durée : 4 heures

∞ **Baccalauréat C Métropole groupe 3<sup>1</sup> juin 1994** ∞

**EXERCICE 1**

**4 points**

**Enseignement obligatoire**

Une urne contient sept boules, cinq noires et deux rouges, indiscernables au toucher.

1. On extrait simultanément deux boules de l'urne. Déterminer les probabilités des événements suivants : A : les deux boules tirées sont rouges ; B : les deux boules tirées sont de même couleur.
2. De la même urne, on extrait cette fois-ci les sept boules, l'une après l'autre. Il y a donc  $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  tirages possibles. 20 Déterminer successivement le nombre de tirages pour lesquels :
  - a. la première boule tirée est rouge ;
  - b. la première boule tirée est noire et la deuxième rouge ;
  - c. la première boule rouge tirée est en troisième position ;
  - d. la première boule rouge tirée est en quatrième position ;
  - e. la première boule rouge tirée est en cinquième position ;
  - f. la première boule rouge tirée est en sixième position.
3. Dans la situation de la question 2., on appelle  $X$  le rang de la première boule rouge tirée.
  - a. Donner la loi de probabilité de cette variable aléatoire  $X$  ; les valeurs  $p_i = P(X = i)$  seront données sous forme de fractions.
  - b. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de  $X$ . On donnera le détail des calculs et les valeurs exactes.

**EXERCICE 2**

**5 points**

**Enseignement de spécialité**

Pour cet exercice, la figure est fournie afin de faciliter votre travail. Il est inutile de la refaire sur votre copie.

Toutefois, si vous introduisez dans vos raisonnements d'autres points que ceux de l'énoncé, veillez à les définir avec précision.

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC, non rectangle, de sens direct.

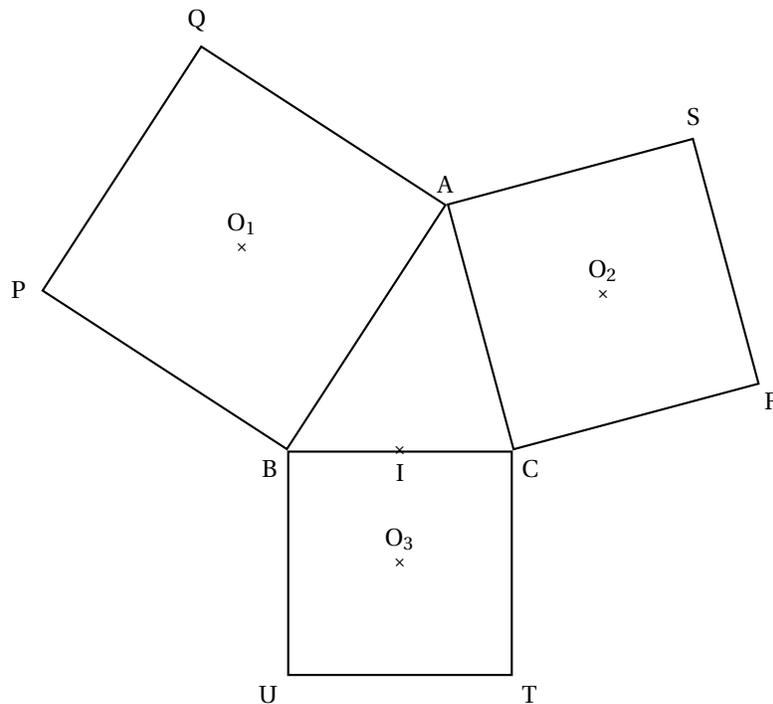
À l'extérieur du triangle, conformément à la figure, on trace les carrés AQP<sub>B</sub>, AC<sub>R</sub>S et BUT<sub>C</sub>, de centres respectifs O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub>, O<sub>3</sub>.

On appelle  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  les cercles circonscrits aux carrés AQP<sub>B</sub> et AC<sub>R</sub>S.

Enfin I est le milieu de [BC].

---

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg



Les trois questions sont indépendantes. Chacune vise à établir une propriété de la configuration.

1. Les cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  se coupent en A et en un second point  $A'$ .  
Montrer que  $A'$  est sur le cercle de diamètre  $[BC]$ . (On pourra utiliser les propriétés angulaires relatives aux points cocycliques.)
2. Soient  $r_1$  et  $r_2$  les rotations de centres  $O_1$  et  $O_2$  et de même angle  $\frac{\pi}{2}$ .
  - a. Quelle est la nature de  $r_2 \circ r_1$  ?
  - b. Quelle est l'image de B par  $r_2 \circ r_1$  ?
  - c. En déduire les éléments caractéristiques de  $r_2 \circ r_1$ .
  - d. Démontrer que le triangle  $IO_1O_2$  est rectangle et isocèle. (On pourra utiliser le point J image de I par  $r_1$ .)
3.
  - a. Quelle est l'image du triangle  $ABO_3$  dans la similitude de centre B, de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  ?
  - b. Déterminer une similitude dans laquelle le triangle  $AO_1O_2$  ait pour image le triangle  $AQC$ .
  - c. Prouver que les segments  $[AO_3]$  et  $[O_1O_2]$  sont orthogonaux et de même longueur.

**PROBLÈME**

**11 points**

**Partie A**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = ]-1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 5 cm.

1. Étudier les variations de la fonction  $f$  et déterminer ses limites aux bornes de  $I$ . En déduire que  $\mathcal{C}$  admet une droite asymptote  $\Delta$  que l'on précisera.
2. a. Écrire l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en un point  $M$  de  $\mathcal{C}$ , d'abscisse  $a$ . On note  $T_a$  cette tangente.  
b. Montrer qu'il existe deux valeurs de  $a$  pour lesquelles la droite  $T_a$  passe par l'origine  $O$ .
3. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ . On mettra en évidence la droite  $\Delta$  et les deux tangentes trouvées ci-dessus.
4. On pose, pour  $x \in I$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .  
La fonction  $F$  est-elle monotone? Est-elle positive?

### Partie B

On pose  $J = \int_0^1 \frac{e^t}{1+t} dt$ .

L'objet de cette partie est d'encadrer l'intégrale  $J$ . On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de  $J$ .

1. En utilisant l'étude de la fonction  $f$  réalisée dans la partie A, montrer que

$$1 \leq J \leq \frac{e}{2}.$$

2. On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = (-1)^n \int_0^1 t^n e^t dt$ .
  - a. Calculer  $u_0$ .
  - b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que  $u_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1)u_n$ .
  - c. Calculer alors successivement  $u_1, u_2, \dots, u_6$ . On donnera les réponses sous la forme  $ae - b$  avec  $a$  et  $b$  entiers naturels.
3. a. Montrer que :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \int_0^1 e^t \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t} dt.$$

- b. En déduire que :

$$J = u_0 + u_1 + \dots + R_n, \quad \text{avec } R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f(t) dt.$$

- c. Prouver que :

$$\frac{1}{n+2} \leq |R_n| \leq \frac{e}{2(n+2)}$$

4. a. Trouver le plus petit  $n$  entier tel que  $\frac{e}{2(n+2)} - \frac{1}{n+2} < 0,05$ .  
b. Calculer  $S_6 = u_0 + u_1 + \dots + u_6$  sous la forme  $ae - b$  avec  $a$  et  $b$  entiers naturels.  
c. Prouver que  $S_6 - \frac{e}{16} \leq J \leq S_6 - \frac{1}{8}$ .  
d. Déduire de ce qui précède un encadrement de  $J$ , d'amplitude inférieure à 0,05 par deux nombres décimaux.