Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe 4 [1] juin 1994

EXERCICE 1 **5 points**

Enseignement de spécialité

Le plan P est muni du repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{e_1},~\overrightarrow{e_2}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On désigne par $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équation :

$$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1.$$

s est la similitude de centre O, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et $\mathscr{E}_1$ est l'image de $\mathscr{E}$ par s.

1. **a.** Donner les coordonnées des sommets et foyers de $\mathscr{E}$ et placer ces . points dans P.
   b. L'un des foyers de $\mathscr{E}$ est F et Δ est la directrice qui lui est associée.
   On désigne par M un point de $\mathscr{E}$ et par H son projeté orthogonal MF sur Δ. Donner la valeur de $\dfrac{M\text{F}}{M\text{H}}$.
2. On note Δ_1, F_1, H_1, M_1 les images respectives de $\mathscr{E}$, F, H, M par la similitude s.
   a. Montrer que pour tout point M de $\mathscr{E}$ on a $\dfrac{M\text{F}}{M\text{H}}=\dfrac{M_1\text{F}_1}{M_1\text{H}_1}$.
   b. Prouver que $\mathscr{E}_1$ est l'ellipse de foyer F_1 ayant Δ_1 pour directrice associée et d'excentricité $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Quels sont les deux axes de $\mathscr{E}_1$?
3. **a.** z et z_1 sont les affixes respectives de M et de son image M_1 par s ; montrer que $z_1=\dfrac{1}{2}(1+\text{i})z$ et que si $M\neq \text{O}$, le triangle OMM_1 est rectangle isocèle en M_1.
   Décrire la construction du point M_1 à partir d'un point M donné distinct de O.
   b. Construire sur la figure du 1. a, les foyers et sommets de $\mathscr{E}_1$; terminer la figure en dessinant $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}_1$ avec des couleurs différentes,

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Les questions 1. *et* 2. *sont indépendantes*

Dans cet exercice, les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles

Une urne contient quinze boules indiscernables au toucher dont une noire, cinq blanches et neuf rouges. On tire simultanément au hasard trois boules de l'urne.

1. X est la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches figurant dans le tirage,
   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X,
   c. Donner la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
2. **a.** Calculer la probabilité des évènements suivants :
   E : « parmi les trois boules du tirage figurent la noire et au moins une rouge ».
   F : « le tirage est tricolore ».

1. Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice, Toulouse

b. Calculer la probabilité que le tirage soit tricolore sachant qu'y figurent la boule noire et au moins une boule rouge.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Ce sujet peut être traité par tous, mais, compte tenu des difficultés, il concerne essentiellement les élèves qui suivent l'enseignement de spécialité.

Première partie

Le plan P est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 3 cm).
L'objet de cette partie est l'étude d'une fonction f.

1. On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ pour } x > 0.$$

Montrer que f est continue.

2. a. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right);$$

Calculer $g(0)$ et en déduire que sur $\mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

b. Par une étude analogue, montrer que si $x \geqslant 0$, alors $\ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$.

c. Établir que pour tout x strictement positif on a :

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leqslant -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}.$$

En déduire que f est dérivable en zéro et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

3. a. Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$h(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

Étudier son sens de variation et en déduire le signe de h sur $[0 ; +\infty[$.

b. Montrer que sur $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

c. Dresser le tableau de variations de f en précisant la limite de f en $+\infty$.

d. On désigne par $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Construire la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Deuxième partie

L'objet de cette partie est la résolution de l'équation $f(x) = x$.

1. a. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $]0 ; +\infty[$ que l'on notera α. Montrer que $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$.

b. Montrer que si $x \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$, alors $f(x) \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

2. h étant la fonction définie au 3. a. de la première partie, montrer que si $x \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ alors :

$$h(1) \leqslant h(x) \leqslant h\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{et que} \quad |h(x)| \leqslant 0,2.$$

En déduire que sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$, on a $\left|f'(x)\right| \leqslant 0,8$.

3. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n.

a. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n on a $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,8\,|u_n - \alpha|$.

c. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times (0,8)^n$.
En déduire que la suite u converge vers α.

d. En utilisant l'inégalité $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times (0,8)^n$, à partir de quelle valeur n_0 de n est-on sûr que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$?
Calculer u_{n_0} à l'aide de votre calculatrice.