Baccalauréat S Métropole juin 2001

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1~;~1]$.

On note G_k le barycentre du système $\left\{\left(\text{A},~k^2+1\right),~(\text{B},~k),~(\text{C},~-k)\right\}$.

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1}.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle $[-1~;~1]$, on a l'égalité :
$$\overrightarrow{\text{A}G_k} = -\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{\text{BC}}.$$
   b. Établir le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1~;~1]$ par
$$f(x) = -\frac{x}{x^2+1}.$$
   c. En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1~;~1]$.

   Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.
3. Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :
$$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}}+\overrightarrow{M\text{B}}-\overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|2\overrightarrow{M\text{A}}-\overrightarrow{M\text{B}}+\overrightarrow{M\text{C}}\right\|.$$
4. Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :
$$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}}+\overrightarrow{M\text{B}}-\overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|2\overrightarrow{M\text{A}}-\overrightarrow{M\text{B}}-\overrightarrow{M\text{C}}\right\|.$$
5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(0~;~0~;~2)$, $(-1~;~2~;~1)$ et

   $(-1~;~2~;~5)$. Le point G_k et les ensembles (E) et (F) sont définis comme ci-dessus.

   a. Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}.

   Montrer que les ensembles (E) et (F) sont sécants.

   b. Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$ intersection de (E) et (F).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].

On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$. Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $\left(\vec{u},~\overrightarrow{\text{O}M_n}\right)$ ait pour mesure α_n.

1. Placer les douze points $\text{M}_0,~\text{M}_1,~\text{M}_2,\ldots,\text{M}_{11}$.
2. On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{12}\right)}$.
3. **a.** Montrer, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :
   - les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés ;
   - les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_{n+4} = \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} z_n$.
En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$, est équilatéral.
On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_nM_{n+4}M_{n+8}$.

4. Douze cartons indiscernables au toucher, marqués M_0, M_1, $\mathrm{M}_2, \cdots, \mathrm{M}_{11}$ sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].
On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = z\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :
M_0 a pour affixe $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.
On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
Placer les points M_0, M_1, M_2.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité

$$z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$$

(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p. Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, $(n-p)$ est multiple de 12.

4. **a.** On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs.
Après avoir vérifié que le couple $(4 ; 9)$ est solution, résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[\mathrm{O}x)$.

PROBLÈME **9 points**
Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

Partie A

⋆ Étude d'une fonction f

On définit la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right).$$

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

3. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 3.
Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\dfrac{5}{4}$, P le projeté orthogonal de B sur l'axe $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}\right)$ et H le projeté orthogonal de B sur l'axe $\left(\text{O} ; \overrightarrow{v}\right)$.
Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H. Placer les points A, B, P et H dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ et représenter la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie B

⋆ Utilisation d'une rotation

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. À tout point M du plan d'affixe z la rotation r associe le point M' d'affixe z'.

1. a. Donner z' en fonction de z.
On note $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$ $(x,\ y,\ x',\ y'$ réels). Exprimer x' et y' en fonction de x et y, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.

b. Déterminer les coordonnées des points A′, B′ et P′ images respectives des points A, B et P par la rotation r.

2. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \text{e}^{-2x} + 2\text{e}^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

a. Montrer que lorsqu'un point M appartient à $(\mathscr{C})$, son image M' par r appartient à (Γ).
On admet que lorsque le point M décrit $(\mathscr{C})$, le point M' décrit (Γ).

b. Tracer sur le graphique précédent les points A′, B′, P′ et la courbe (Γ) (l'étude des variations de g n'est pas demandée).

Partie C

⋆ Calcul d'intégrales

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln 2} g(x)\,\text{d}x$.
Interpréter graphiquement cette intégrale.

2. a. Déterminer, en unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan $\mathscr{D}$ limité par les segments [AO], [OH] et [HB] et l'arc de courbe $(\mathscr{C})$ d'extrémités B et A.

b. On pose $\text{I} = \displaystyle\int_{\frac{5}{4}}^{3} \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\,\text{d}x$.
Trouver une relation entre $\mathscr{A}$ et I puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I.