

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Métropole septembre 1994 ∞

EXERCICE 1

4 points

Dans un plan on donne une droite (Δ) et un point O n'appartenant pas à (Δ) .
On note H le projeté orthogonal de O sur (Δ) . Pour la figure on prendra $OH = 4$ cm.
Un point P décrit la droite (Δ) .
La perpendiculaire en P à (Δ) et la perpendiculaire en O à la droite (OP) se coupent en un point M ; soit I le milieu de $[PM]$.

1. Montrer que $IO = IP$ et en déduire que, lorsque P décrit (Δ) , le point I appartient à une parabole (C) dont on précisera le foyer et la directrice.
2. On considère un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) où $\vec{OH} = \vec{i}$.
 - a. On note $(x; y)$ les coordonnées du point M dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
Calculer le produit scalaire $\vec{OM} \cdot \vec{OP}$ et en déduire une équation cartésienne de l'ensemble (C') décrit par le point M quand P décrit (Δ) .
 - b. Montrer que (C') est une parabole dont on précisera le foyer O' et la directrice (Δ') .
3. Placer approximativement sur le dessin les courbes (C) et (C') .

EXERCICE 2

4 points

Dans le plan orienté, on donne un triangle ABC direct (c'est-à-dire que l'angle orienté (\vec{AB}, \vec{AC}) admet une mesure comprise entre 0 et π).

$ACDE$ est le carré tel que $(\vec{AC}, \vec{AE}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$; on désigne son centre par O .

$AFGB$ est le carré tel que $(\vec{AF}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$; on désigne son centre par O' .

I est le milieu de $[BC]$. J est le milieu de $[EF]$.

1. En utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ démontrer que l'on a : $(\vec{FC}, \vec{BE}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $FC = BE$.
2. En déduire que le triangle OIO' est un triangle rectangle en I et isocèle.
3. Démontrer que $JO'IO$ est un carré.

PROBLÈME

12 points

Le plan est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique 2 cm).

Partie A

1. Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 1 + x - e^x$$

et soit C sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- a. Établir le tableau de variation de f en précisant les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

- b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe C et préciser la position de C par rapport à Δ .
 - c. Tracer la droite Δ et la courbe C .
2.
 - a. Déterminer les positions relatives de C et de la droite d'équation $y = x - 2$.
 - b. Calculer l'aire A de la partie E du plan délimitée par la courbe C et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = x - 2$.

Partie B

Dans cette partie, à tout point M du plan, de coordonnées $(x; y)$, on associe son affixe $z = x + iy$.

Soit T l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que $z_1 = (-1 - i)z + 1$.

1. Donner la nature de T et déterminer ses éléments caractéristiques.
2. Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction des coordonnées x_1 et y_1 du point M_1 .
3. Déterminer les équations des transformées par T des droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = x - 2$.
4. Soit f_1 la fonction numérique définie sur $] -\infty; 2[$ par

$$f_1(x) = 1 - x - 2 \ln(2 - x)$$

et soit C_1 sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit M un point de C et $M_1 = T(M)$.

Montrer que l'abscisse x_1 de M_1 est strictement inférieure à 2 et que M_1 est sur la courbe C_1 .

Inversement, si M_1 est sur la courbe C_1 montrer qu'il existe un point M de la courbe C tel que $M_1 = T(M)$.

En déduire que C_1 est l'image de C par T .

Partie C

1. Établir le tableau de variations de f_1 en précisant les limites de f_1 en $-\infty$ et 2. On pourra remarquer que :

$$f_1(x) = (2 - x) \left[\frac{1 - x}{2 - x} - 2 \frac{\ln(2 - x)}{2 - x} \right].$$

2. Soit g la fonction numérique définie sur $] -\infty; 2[$ par :

$$g(x) = 2x - e^x + 2 \ln(2 - x) = f(x) - f_1(x).$$

Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

3.
 - a. Déterminer le sens de variation de g' sur $] -\infty; 2[$. Calculer $g'(0)$.
 - b. Établir le tableau de variation de g sur $] -\infty; 2[$ en précisant les limites de g en $-\infty$ et 2.
 - c. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $] -\infty; 2[$ ($\alpha < \beta$).
Vérifier que $-0,9 < \alpha < -0,8$ et $0,6 < \beta < 0,7$.
 - d. Préciser les positions relatives des courbes C et C_1 .
4. Tracer la courbe C_1 .
5. On appelle E_1 la partie du plan délimitée par la courbe C_1 et les droites d'équations respectives $y = 1 - x$ et $x = -1$.
On admet que la partie E est transformée en E_1 par T .
Calculer l'aire A_1 de la partie E_1 .