

œ Baccalauréat A1 et B Métropole septembre 1994 œ

EXERCICE 1

5 points

Un document statistique donne les renseignements suivants, concernant la région Rhône-Alpes :

« La population totale augmente régulièrement de 1,2 % par an ; La population agricole diminue régulièrement de 3 % par an.

Au 1^{er} janvier 1990, la population totale est de 4 650 000 habitants, et la population agricole représente 9 % de la population totale. »

1. a. Quelle était la population théorique totale au 1^{er} janvier 1991 ?
b. Quelle était celle au 1^{er} janvier 1992 ?
c. On désigne par $p(n)$ la population totale prévue au 1^{er} janvier $(1990 + n)$, où n est un entier positif.
Démontrer que $p(n) = (1,012)^n \times p(0)$.
d. Quelle population totale peut-on prévoir au 1^{er} janvier 1995 ?
2. a. Quelle est la population agricole au 1^{er} janvier 1990 ?
b. On désigne par $a(n)$ la population agricole au 1^{er} janvier $(1990 + n)$. Calculer $a(n)$.
c. Quelle population agricole peut-on prévoir au 1^{er} janvier 1995 ?
3. a. Exprimer le rapport $r(n) = \frac{a(n)}{p(n)}$ en fonction de n .
b. Calculer la valeur minimale de n pour laquelle $r(n) \leq 0,03$.

EXERCICE 2 SÉRIE B

5 points

On s'intéresse aux visiteurs de la « Tour Mathématiques ».

Cette tour a trois étages. Elle est desservie par un ascenseur et par un escalier.

Neuf visiteurs sur dix utilisent l'ascenseur et, parmi ceux-ci :

- la moitié va au troisième étage ;
- un tiers va au deuxième étage ;
- les autres vont au premier étage.

Les autres visiteurs utilisent l'escalier, et, parmi ceux-ci :

- la moitié va au deuxième étage ;
- les autres vont au premier étage.

1. On interroge un visiteur, au hasard, à la sortie de la tour. Quelle est la probabilité pour que :
 - a. il soit allé au deuxième étage, en ascenseur ?
 - b. il soit allé au deuxième étage ?
 - c. il soit monté à pied, sachant qu'il est allé au deuxième étage ?
(On donnera les valeurs exactes des résultats.)
2. Les tarifs affichés pour la visite de la tour sont les suivants :

Ascenseur :	
Premier étage	17 F
Deuxième étage	34 F
Troisième étage	51 F
Escalier, quel que soit l'étage	7 F

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque visiteur, associe le prix qu'il a payé pour la visite.

- a. Déterminer la loi de probabilité de X .
- b. Calculer son espérance mathématique $E(X)$, sa variance $V(X)$ et son écart-type.

PROBLÈME**10 points**

Le but de ce problème est la représentation graphique de la fonction f définie dans $]2; +\infty[$ par

$$f(x) = x - 3 - \frac{\ln x}{x-2}$$

dans le plan P muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm.

Partie A**ÉTUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE**

Soit g la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \frac{2}{x} - \ln x.$$

1. Montrer que $g'(x) = \frac{2-x}{x^2}$.
2. Dresser le tableau de variations de g sur I , et en déduire le signe de $g(x)$ sur I . On ne demande aucun calcul de limite.

Partie B**ÉTUDE DE f ET DE SA COURBE REPRÉSENTATIVE C DANS P**

1. Calculer la limite de f pour la valeur 2. Quelle est la conséquence graphique ?
2. a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-2} = 0$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
b. Montrer que la droite D d'équation $y = x - 3$ est asymptote à C . Montrer que C est située au-dessous de D .
3. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f .
Vérifier que $f'(x) = 1 - \frac{g(x)}{(x-2)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f .
4. Dans le plan P , construire D , puis en tenant compte des résultats obtenus dans les questions précédentes, construire C .
5. a. On constate graphiquement que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle $]3; 4[$, une solution unique, α .
Justifier rigoureusement ce résultat.
b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
Justifier.