∽ Baccalauréat C Métropole et Alger juin 1960 ∾

I. - 1$^{\text{er}}$ sujet

Établir le système de relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

entre les éléments d'un triangle quelconque.

Application : Les angles d'un triangle sont supposés vérifier la relation B = 2 C ; calculer cosC en fonction des côtés b, c et en déduire une inégalité vérifiée par ces côtés.

I. - 2$^{\text{e}}$ sujet

Exposer une méthode permettant de trouver tous les diviseurs communs à deux nombres entiers.

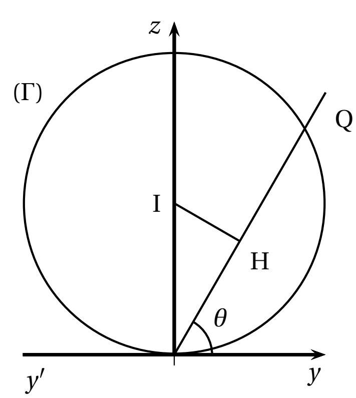
Application : Déterminer tous les nombres premiers divisant à la fois 364 et 476.

I. - 3$^{\text{e}}$ sujet

Coordonnées célestes équatoriales : ascension droite et déclinaison. Définition et mesure.

II.

Un plan (V), que l'on prendra comme plan de figure, est rapporté à deux axes perpendiculaires $y'\text{O}y$, $z'\text{O}z$, le demi-axe Oy étant dirigé vers la droite. I étant un point fixe de Oz, défini par $\overline{\text{OI}} = R (R > 0)$, on désigne par ($\Gamma$) le cercle de centre I et de rayon R et par (S) la sphère admettant ce cercle pour grand cercle ; dans le plan (P) tangent à (S) en O, on trace un axe $x'\text{O}x$ perpendiculaire à $y'\text{O}y$ (voir figure).
Un plan variable (Q) pivote autour de $x'\text{O}x$ et coupe la sphère (S) suivant un cercle (C), dont la projection orthogonale sur (P) est une ellipse (E).
On désigne par H le centre de (C), par ω le centre de (E) et par θ l'angle yOH.



Dans les questions **1.** et **2.** on se bornera à étudier le cas où l'angle θ est aigu $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.
Le plan (P) sera rapporté aux deux axes rectangulaires $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.
[Le demi-axe Ox est supposé perpendiculaire en O au plan de figure et dirigé vers l'avant ; le plan (Q) est représenté par sa trace.]

1. **a.** Calculer, en fonction de R et θ, le rayon r du cercle (C), les demi-axes, a, b $(a \geqslant b)$, de (E) et la distance $\text{FF}' = 2c$ des foyers de (E).
   Montrer que les directrices (Δ) et (Δ') de (E) sont fixes.
   Par la suite, on désignera par F celui des foyers de (E) dont l'abscisse est positive.

b. On rabat le plan (V) sur le plan (P) autour de la droite $y'\text{O}y$.

Montrer que, dans ce rabattement, le triangle OωH se rabat suivant l'un des triangles OωF, OωF$'$.

Quel est le rabattement du point I ?

Déterminer le lieu des points F, F$'$ quand θ varie de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$.

2. a. Soit m_0 un point de (P) d'ordonnée positive. En utilisant la manière dont (E) a été définie, trouver combien d'ellipses (E) passent par m_0.

b. On désigne par (E$'$) une ellipse située dans le plan (P), admettant le point O pour sommet de l'axe non focal, et les droites (Δ) et (Δ') précédemment déterminées pour directrices.

L'ellipse (E') peut-elle être considérée comme la projection d'un cercle (C) de la sphère (S) ?

c. Une ellipse (E) peut-elle être considérée comme la projection d'un cercle de (S) autre que le cercle (C) qui a servi à la définir ?

3. On désigne par A celui des sommets de l'axe focal de (E) dont l'abscisse est positive.

a. Calculer en fonction de R et θ les coordonnées x, y de A.

Exprimer y^2 en fonction de x et de R. En déduire les variations de y^2, puis de y, quand x varie de 0 à R.

Construire la courbe représentative (L). Utiliser cette courbe (L) pour construire le lieu de A quand l'angle $\theta = y\text{OH}$ varie de 0 à π ; représenter sur la même figure le lieu du deuxième sommet, A$'$, de l'axe focal de (E).

b. On admet que l'aire limitée par (C) et l'aire limitée par (E) sont liées par la même relation que l'aire d'un polygone du plan (Q) et l'aire de sa projection sur le plan (P). Utiliser ce principe pour calculer l'aire z limitée par (E).

Exprimer z au moyen de R et de $u = \cos\theta$.

Étudier les variations de la fonction z de la variable u ainsi obtenue.

Pour quelles valeurs de θ $(0 < \theta < \pi)$ l'ellipse (E) a-t-elle l'aire la plus grande possible ?

Quelle est la valeur de ce maximum ?

N. B. - Les diverses questions de ce problème sont indépendantes.