

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Métropole septembre 1987 ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Soit h la fonction définie par $h(x) = x^2 e^{-x}$. On pose

$$K = \int_0^1 h(x) dx.$$

Montrer que $K = 2 - \frac{5}{e}$ (on pourra utiliser la méthode d'intégration par parties ou chercher une primitive H de h sous la forme

$$H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x},$$

où a, b, c sont des réels à déterminer).

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1 + x^2 e^{-x}}$. On pose $I = \int_0^1 f(x) dx$. (On ne cherchera pas à calculer I .)

a. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$,

$$0 \leq x^2 e^{-x} \leq 1.$$

Vérifier que pour tout u de l'intervalle $[0; 1]$,

$$1 - u \leq \frac{1}{1 + u} \leq 1 - \frac{u}{2}.$$

b. En déduire que $1 - K \leq I \leq 1 - \frac{K}{2}$; donner un encadrement de I d'amplitude égale à $0,1$.

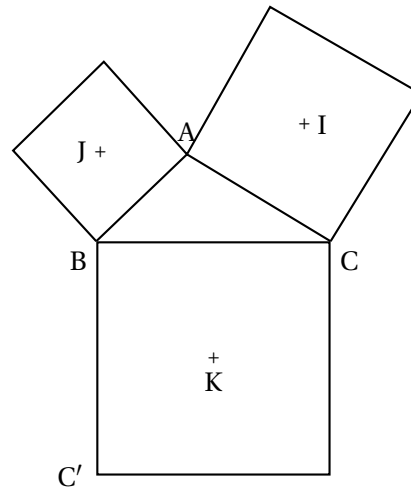
EXERCICE 2

4 points

Le plan est orienté. On considère un triangle ABC tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un nombre compris entre 0 et π .

On construit à l'extérieur de ce triangle trois carrés de côtés respectifs CA, AB et BC et on désigne par I, J et K leurs centres, conformément à la figure. On a

$$(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JB}) = (\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}) = -\frac{\pi}{2}.$$



On veut démontrer que les segments IB et JK sont orthogonaux et ont même longueur. On considère la similitude directe S_1 de centre C qui transforme I en A et la similitude directe S_2 de centre B qui transforme A en J .

1. Donner les rapports et les angles de S_1 et de S_2 . Quelle est la nature de la transformation $S_2 \circ S_1$?
2. Préciser les images de I et de B par $S_2 \circ S_1$.
3. Conclure.

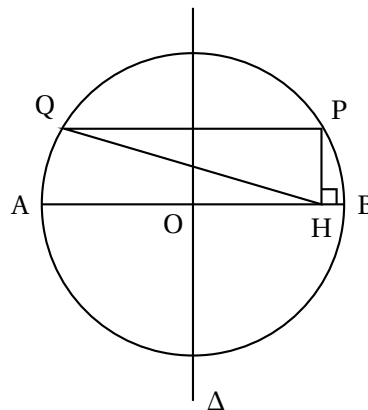
PROBLÈME

12 points

Le problème propose trois approches différentes de l'étude d'un triangle particulier. Les trois parties du problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

A. Soit $[AB]$ un diamètre du cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon R (on prendra $R = 2$ cm pour la figure). On appelle (Δ) la médiatrice de $[AB]$ et \mathcal{A} la famille des triangles PQH définis ainsi :

- P est un point du cercle (\mathcal{C}) .
- Q est le symétrique de P par rapport à (Δ) .
- H est le projeté orthogonal de P sur (AB) .



Soit PQH un triangle de la famille \mathcal{A} .

1. Montrer que $PQ = 2OH$ et que PQH est isocèle si, et seulement si, $PH = 2OH$.

En déduire que PQH est isocèle si, et seulement si, P est l'intersection de (\mathcal{C}) et de l'une ou l'autre de deux droites que l'on déterminera.

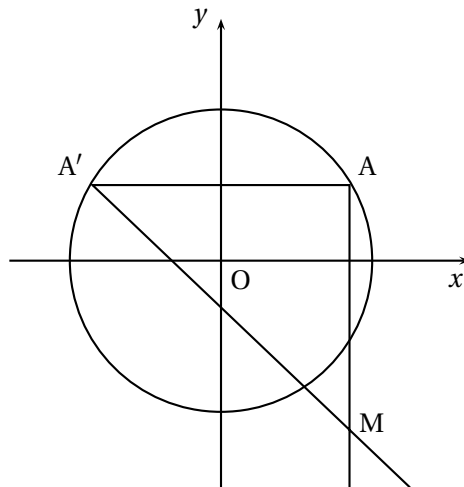
2. Faire une figure représentant les triangles isocèles de la famille \mathcal{A} .

B. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes (Ox) et (Oy) . (pour la figure demandée, on prendra l'unité égale à 2 cm).

Soit (\mathcal{C}) le cercle de centre O et de rayon l'unité.

À tout point A du cercle (\mathcal{C}) on associe le point A', symétrique de A par rapport à (Oy) , et le point M, intersection de la parallèle à (Oy) passant par A et de la parallèle à la droite d'équation $y = -x$ passant par A'.

On pose $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OA})$ ($\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$).



1. Montrer que les coordonnées x et y de M s'expriment par les formules :

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta - 2\cos\theta. \end{cases}$$

2. Soit (Γ) la courbe paramétrée, ensemble des points $M(\theta)$ de coordonnées

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta - 2\cos\theta. \end{cases}$$

θ variant dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

a. Montrer que les points $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$ sont symétriques par rapport à O. On appelle (Γ_1) l'ensemble des points $M(\theta)$ lorsque θ décrit $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- b. Étudier les variations de $x(\theta)$ et $y(\theta)$ pour θ élément de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. On pourra montrer que sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$y'(\theta) = 2 \cos \theta \left(\frac{1}{2} + \tan \theta \right)$$

et introduire l'unique réel α de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant

$$\tan \alpha = -\frac{1}{2}.$$

- c. Déterminer les coordonnées des points $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $M\left(\frac{1}{2}\right)$, et donner un vecteur directeur de la tangente à (Γ) en chacun de ces points. En quel point la tangente à (Γ_1) est-elle parallèle à (Oy) ? Donner des valeurs approchées à 10^{-2} près des coordonnées de $M(\alpha)$.
- d. Construire, sur un même dessin, le cercle (\mathcal{C}) , la courbe (Γ_1) puis la courbe (Γ) : placer en particulier les points introduits en c. ainsi que les tangentes à (Γ) en ces points.
3. Utiliser (Γ) et le cercle (\mathcal{C}) pour tracer sur la figure précédente, un triangle isocèle de la famille (d) définie en A.

C. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes (Ox) et (Oy) . (Pour les figures demandées, on prendra l'unité égale à 2 cm).

Soit (\mathcal{C}) le cercle de centre O et de rayon l'unité. Soit N le point d'abscisse a de l'axe (Ox) avec a élément de l'intervalle $[-1; 1]$. La parallèle à la droite d'équation $(y = -x)$ passant par N coupe le cercle (\mathcal{C}) en deux points; on note E celui de ces points dont l'abscisse est la plus petite. Soit E' le symétrique de E par rapport à (Oy) et N' le projeté orthogonal de E' sur (Ox) .

1. Montrer que l'abscisse de N' est

$$a' = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2 - a^2} - a \right).$$

2. Montrer qu'il existe un unique point vérifiant $N = N'$; calculer son abscisse r .

On note R ce point.

Établir que le triangle REE' est rectangle et isocèle.

3. On considère la suite de points ainsi définie :

N_0 est le point O et pour tout k entier positif ou nul, N_{k+1} est le milieu de $[N_k N'_k]$ où N'_k est le point associé à N_k par le procédé exposé ci-dessus.

- a. Faire une figure illustrant la construction de N_1 et N_2 .
- b. Soit U_k l'abscisse de N_k (par construction de N_k , U_k appartient à $[0; 1]$).
Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{4} \left(\sqrt{2 - x^2} - x \right).$$

Montrer que pour tout entier k positif ou nul, $u_{k+1} = g(u_k)$; montrer que $g(r) = r$.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier k positif ou nul,

$$|u_{k+1} - r| \leq \frac{1}{4} |u_k - r|.$$

En déduire que la suite (u_k) converge vers r .

c. Démontrer que $N_3R \leq 10^{-2}$.