

♣ Baccalauréat C Métropole septembre 1989 ♣

EXERCICE 1

4 POINTS

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B distincts d'affixes respectives z_1 et z_2 .

Soient A' l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

B' l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1. Exprimer les affixes z'_1 et z'_2 des points A' et B' en fonction de z_1 et z_2 .
2. Quelle est l'affixe du milieu I de [A'B']?
3. Quelle est l'affixe du point H défini par $\vec{OH} = \vec{AB}$?
4. Dédurre des questions précédentes que la médiane (OI) du triangle OA'B' est une hauteur du triangle OAB et que $OI = \frac{1}{2}AB$.

EXERCICE 2

4 POINTS

On considère dans le plan orienté un triangle ABC.

Soit G le barycentre du système $\{(A, 3), (B, 1), (C, 1)\}$, Q le barycentre du système $\{(A, 3), (C, 1)\}$ et R le barycentre du système $\{(A, 3), (B, 1)\}$.

1. Démontrer que les droites (BQ) et (CR) passent par G.
2. Soit P le milieu de [BC], démontrer que les points A, P, G sont alignés.
Exprimer \vec{PG} en fonction de \vec{PA} .
3. On suppose B et C fixes et que le point A décrit l'ensemble E des points M du plan tels que $(\vec{MB}, \vec{MC}) = \frac{\pi}{2}$ modulo π .
Déterminer alors l'ensemble E' décrit par le point G.

PROBLÈME

12 POINTS

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R} définie pour tout réel positif x par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On appelle \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité 3 cm).

Partie 1

1. Étudier les variations de la fonction f_1 et déterminer sa limite en $+\infty$.
Tracer \mathcal{C}_1 en précisant la tangente à l'origine.
2. Pour n entier supérieur ou égal à 2, étudier les variations de la fonction f_n et déterminer sa limite en $+\infty$.
Tracer \mathcal{C}_3 sur une nouvelle feuille, en précisant la tangente à l'origine.
3. On note s_n la réflexion par rapport à la droite d'équation $x = n$ et \mathcal{C}'_n l'image de \mathcal{C}_n par s_n .
 - a. M étant le point du plan de coordonnées $(x; y)$, calculer les coordonnées de son image par s_n .

- b.** Montrer que \mathcal{C}'_n est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient : $x \leq 2n$ et $y = f_n(2n - x)$.
- c.** Tracer \mathcal{C}'_3 sur la même feuille que \mathcal{C}_3 .
Pour $x \leq 2n$, on pose $g_n(x) = f_n(2n - x)$.
- d.** En interprétant géométriquement les intégrales, justifier l'égalité :

$$\int_n^{2n} f_n(t) dt = \int_0^n g_n(t) dt.$$

- 4.** Pour x élément de $[0; n]$, on pose $h_n(x) = \ln[g_n(x)] - \ln[f_n(x)]$.
- a.** De l'étude des variations de h_n , déduire le signe de $h_n(x)$.
- b.** Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; n]$ on a : $f_n(x) \leq g_n(x)$.
- c.** Déduire de ce qui précède l'inégalité : $\int_0^n f_n(t) dt \leq \int_n^{2n} f_n(t) dt$.

Partie 2

Pour tout réel positif x , on pose : $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

- 1.** Démontrer que la fonction F_n est croissante sur $[0; +\infty[$.
- 2.** À l'aide d'intégrations par parties :
- a.** Calculer $F_1(x)$.
- b.** Démontrer que, pour tout réel positif x et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x).$$

- 3.** En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout réel positif x et tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$F_n(x) = n! \left[1 - e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) \right].$$

- 4.** **a.** Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = n!$.
- b.** Démontrer que pour tout réel x positif ou nul on a : $F_n(x) \leq n!$.

Partie 3

- 1.** Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$F_n(n) + \int_n^{2n} f_n(t) dt \leq n!$$

- 2.** Déduire des résultats des parties 1 et 2 que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$0 \leq F_n(n) \leq \frac{n!}{2}$$

$$\text{puis } \frac{1}{2}e^n \leq 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \leq e^n.$$