Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole septembre 1991

EXERCICE 1 **5 points**

Dans l'espace, on considère une pyramide ABCDE telle que :

- La base ABCD est un carré de centre O.
- La droite (OE) est perpendiculaire au plan (ABCD).
- OE = OA = a.

On se propose de déterminer toutes les réflexions et rotations laissant invariante cette pyramide.

1. Démontrer que la pyramide est invariante par la réflexion de plan (ACE).
   Est-elle invariante par le demi-tour d'axe (OE) ?
2. **a.** Déterminer l'isobarycentre, G, des points A, B, C, D, E.
   b. Démontrer que les distances GA et GE sont différentes.
3. Soit f une réflexion ou rotation laissant invariante la pyramide.
   a. Démontrer que le point G est invariant par f
   b. Démontrer que l'image de E par f ne peut pas être le point A.
   c. Démontrer que le point E est nécessairement invariant par f.
4. **a.** Déterminer les réflexions laissant invariante la pyramide.
   b. Déterminer les rotations laissant invariante la pyramide.

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
(On choisira 2 cm comme unité graphique.)
Soit $\mathscr{C}$ la conique d'équation :

$$3(x+1)^2+4y^2=12.$$

1. **a.** Quelle est la nature de cette conique?
   b. Construire $\mathscr{C}$.
   c. Déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de $\mathscr{C}$.
2. À chaque point M de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(x ; y)$, on associe le nombre complexe $z = x+\mathrm{i}y$ affixe de M.
   a. Démontrer que $|z| = \dfrac{1}{2}(3-x)$.
   b. En déduire que $|z| = \dfrac{3}{2+\cos\theta}$, θ étant un argument de z.
3. Soit M' et M'' les points de $\mathscr{C}$ ayant pour affixes respectives z' et z'' d'arguments respectifs θ et $\theta+\pi$.
   a. Calculer $\|\overrightarrow{M'M''}\|$ en fonction de θ.
   b. Déterminer θ pour que $\|\overrightarrow{M'M''}\|$ soit maximum puis minimum.

PROBLÈME **10 points**

Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f_n(x) = x^{n+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

L'objet du problème est d'étudier :

- dans la partie A, la fonction f_n et sa courbe représentative, notée $\mathscr{C}_n$ dans un repère orthonormal.
- dans la partie B l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A

Dans cette partie, le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. (Unité graphique : 10 cm.)

1. Montrer que $\mathscr{C}_0$ est un demi-cercle, de rayon $\dfrac{1}{2}$, dont on précisera le centre.
2. Soit $n \geqslant 1$.
   - **a.** Calculer $f_n'(x)$ pour $0 < x < 1$ et montrer que $f_n'(x)$ et $\left(n+\dfrac{1}{2}\right) - (n+1)x$ ont même signe.
   - **b.** Étudier la dérivabilité de f_n en 0 et 1.
   - **c.** Donner le tableau de variations de f.
     (On ne demande pas le calcul du maximum de f_n).
3.
   - **a.** Soit $x \in [0\,;\,1]$ et $n \geqslant 0$.
     Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   - **b.** En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.
   - **c.** Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ dans le même repère.

Partie B

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $g(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$ et G la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par :

   $$G(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

   Vérifier que G est la primitive de g qui s'annule pour $x = 1$.
2. Soit $n > 0$.
   - **a.** En procédant à une intégration par parties utilisant G, démontrer que :

     $$I_n = \frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)(I_{n-1} - I_n).$$

     En déduire la relation :

     $$[1] \qquad I_n = \frac{2n+1}{2n+4} I_{n-1}.$$

     Du résultat obtenu en A.1. déduire la valeur de I_0.

b. Montrer que pour tout entier $n > 0$:

$$I_n = \frac{3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (2n+1)}{6 \times 8 \times 10 \times \ldots \times (2n+4)} \times \frac{\pi}{8}.$$

3. On se propose d'étudier le comportement de la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$.

a. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.
Que peut-on en déduire ?

b. Montrer, à l'aide d'une majoration de $f_n(x)$ sur $[0\,;\,1]$, que :

$$I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$