Baccalauréat ES Métropole juin 1995

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. La courbe $\mathcal{C}$ (voir figure ci-dessous) représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$f(x) = (ax + b)\text{e}^x$$

où a et b sont deux nombres que l'on se propose de déterminer, en utilisant les informations lues sur la figure.

1. **a.** Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

   b. Déterminer graphiquement $f'(-2)$ et en déduire une relation entre a et b.

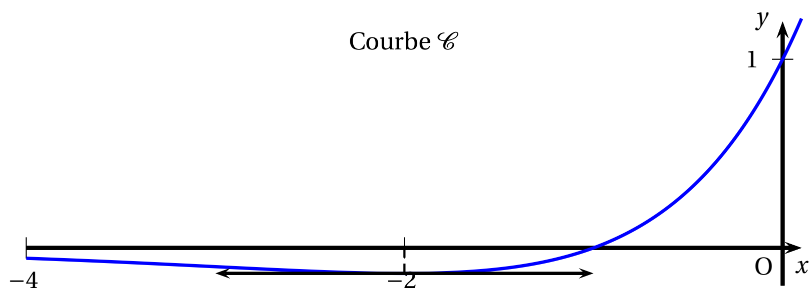
2. En utilisant une valeur de la fonction lue sur le graphique trouver une autre relation entre a et b.

   Calculer a et b et écrire l'expression de $f(x)$ ainsi obtenue.

3. **a.** Préciser le minimum de la fonction f ; on donnera la valeur exacte.

   b. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation

$$m = (x + 1)\text{e}^x.$$



EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Les deux tableaux ci-dessous regroupent des données sur le commerce extérieur relatif aux industries agro-alimentaires pour la période 1981-1991.

Premier tableau

Exportations x_i et importations y_i (en milliards de F)

Année	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
$x_i \ldots$	55,6	59,1	65,1	76,1	77,2	73,8	76,4	89,2	103,3	105,6	111,3
$y_i \ldots$	45	52,1	60	67,8	71,4	69,4	72	80,3	89,4	88,9	95,2

Source : Tableaux de l'économie française, 1993

Deuxième tableau

Rang t_i de l'année et solde $z_i = x_i - y_i$ (également en milliards de F)

Année	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
$t_i \ldots$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$z_i \ldots$	10,6	7	5,1	8,3	5,8	4,4	4,4	8,9	13,9	16,7	16,1

Source : Tableaux de l'économie française, 1993

Aucun tableau de calculs n'est demandé dans cet exercice.

1. On considère la série double $(t_i\ ;\ z_i)$ formée à partir du deuxième tableau.
   a. Faire une représentation graphique du nuage des points. On prendra en abscisses 1 cm pour 1 an (année de rang 0 à l'origine O) et en ordonnées 1 cm pour 1 milliard de francs (solde 4 à l'origine O).

      Un ajustement affine est-il approprié ? On justifiera la réponse.
   b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série double.
2. On considère maintenant la série double $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ formée à partir du premier tableau.
   a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série.
   b. Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis avec deux décimales).
   c. Déterminer en milliards de francs le montant prévisible (arrondi à l'unité près) des exportations lorsque le montant des importations aura atteint 100 milliards de francs.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Un boulanger fabrique des pains de campagne qui doivent peser, en théorie, 600 grammes.
On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur les poids possibles des pains de campagne, exprimés en grammes et arrondis à 10 grammes près.
Le tableau suivant indique la probabilité p_i de l'évènement $X = x_i$:

$X = x_i$	580	590	600	610	620
p_i	0,12	0,25	0,32	0,27	0,04

Exemple de lecture, la probabilité qu'un pain choisi au hasard pèse 590 grammes est 0,25.

1. Calculer l'espérance mathématique de X et l'écart type de X.
2. Un client achète un pain de campagne. Quelle est la probabilité que son pain pèse au moins 600 grammes ?
3. Un contrôleur du service de la Répression des fraudes entre dans la boulangerie et prélève, au hasard, dix pains de campagne.
   a. Quelle est la probabilité d'avoir exactement trois pains de 580 grammes ?
   b. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un pain de campagne de 580 grammes ?
   c. Quelle est la probabilité d'avoir au plus un pain de campagne de 580 grammes ?

      On donnera les valeurs exactes puis des valeurs décimales approchées à 10^{-4} près.

PROBLÈME **10 points**

Une entreprise achète une machine 30 000 F. Elle peut la revendre au bout de t années au prix de

$$v(t) = \frac{30}{0,5t+1} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 8.$$

où t est exprimé en années et $v(t)$ en milliers de francs (en abrégé kF).

1. **a.** Au bout de combien d'années la machine aura-t-elle perdu 50 % de sa valeur à l'achat ?

   b. Quelle est sa valeur de revente au bout de 4 ans ?

   c. La différence, exprimée en kF, entre le prix d'achat de la machine et son prix de revente au bout de t années est, $D(t) = 30 - v(t)$.

   Montrer que D est une fonction croissante sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

2. On peut exprimer le coût total d'entretien en kF, pour une durée de t années d'utilisation, par

$$E(t) = 2,5\mathrm{e}^{0,4t} - t - 2,5.$$

   a. Calculer $E'(t)$, où E' désigne la fonction dérivée de E.

   b. En déduire que E est une fonction croissante sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

3. **a.** Vérifier que le coût total (en kF) d'usage de cette machine est :

$$f(t) = D(t) + E(t) = 27,5 - \frac{30}{0,5t+1} + 2,5\mathrm{e}^{0,4t} - t.$$

   b. Déduire des questions précédentes le sens de variation de f sur $[0 ; 8]$.

   c. Tracer la courbe représentative Γ de f, dans le plan muni d'un repère rectangulaire, avec pour unités : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 4 kF sur l'axe des ordonnées.

   On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes :

t	0	1	2	3	4	4,5	5	6	7	8
$f(t)$	0	10,23	16,06	20,80	25,88	28,9,	32,40	41,56	54,94	74,83

4. Le coût moyen d'utilisation, en kF et au bout de t années, est égal à

$$U(t) = \frac{f(t)}{t} \quad \text{avec } 1 \leqslant t \leqslant 8.$$

   a. Soit M le point d'abscisse t de la courbe Γ. Montrer que $U(t)$ est le coefficient directeur de la droite (OM).

   b. Déterminer graphiquement la valeur de t pour laquelle $U(t)$ est minimum.

   c. On admet que la fonction dérivée de U peut s'écrire sous la forme $U'(t) = \dfrac{g(t)}{t^2}$, où g est une fonction continue dont le tableau de variation est le suivant :

t	1		2,7		8
$g(t)$	$-3,0$	↘	$-6,8$	↗ 1	118

   Montrer que g s'annule en un point et un seul de $[1 ; 8]$, que l'on notera a.

   On admettra que l'on a, $4,4 \leqslant a \leqslant 4,5$.

   d. Dresser le tableau de variation de U et vérifier que U admet un minimum.