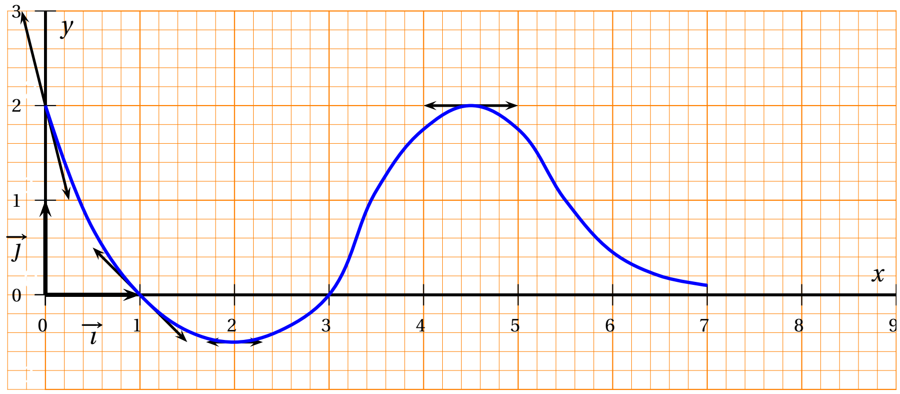
Baccalauréat ES Métropole juin 1998

Exercice 1 — **5 points**

Commun à tous les candidats



Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm), on considère la courbe ci-dessus représentant une fonction f définie et dérivable sur $[0 ; 7]$.

Toutes les réponses aux questions suivantes seront obtenues à partir du graphique.

1. Lire $f(0)$, $f(2)$, $f'(1)$, $f'\left(\dfrac{9}{2}\right)$.
2. Déterminer le signe de la fonction f et celui de sa dérivée f'.
3. Déterminer la dérivée logarithmique en 0.
4. Indiquer à 0,1 près des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = 1$.
5. On note $\text{I} = \displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{5} f(x)\,\text{d}x$. Parmi les intervalles proposés ci-dessous, indiquer celui qui contient le nombre I (on précisera rapidement la méthode utilisé pour le déterminer) :

$$\left[0 ; \frac{1}{2}\right[, \quad \left[\frac{1}{2} ; 2\right[, \quad [2 ; 5[, \quad [5 ; 10[$$

Exercice 2 — **5 points**

Enseignement obligatoire

Un magasin de distribution vend deux types de téléphones portables : des téléphones standard et des téléphones miniatures.

Il propose aussi deux types d'abonnements mensuels : l'abonnement 1 heure ; l'abonnement 2 h 30.

Le service marketing effectue une enquête sur un échantillon de 2 000 clients ayant acheté dans ce magasin, pendant l'année en cours, un téléphone, et un seul, de l'un des types vendus et ayant opté pour un seul des abonnements proposés.

Sur les 2 000 clients interrogés, 1 200 ont acheté le modèle standard.

Sur ces 2 000 clients, 960 ont choisi l'abonnement 1 heure.

Un client est pris au hasard dans l'échantillon. On note les évènements :

— S « Le client a acheté le modèle standard » ;
— M « Le client a acheté le modèle miniature » ;
— A_1 « Le client a choisi l'abonnement 1 heure » ;
— A_2 « Le client a choisi l'abonnement 2 h 30 ».

On note $p(E)$ la probabilité d'un évènement E.

Les résultats seront donnés sous forme décimale avec 3 chiffres après la virgule.

1. Déterminer $p(S)$, $p(M)$, $p(A_1)$.
2. **a.** Parmi les clients qui ont acquis le modèle standard, 32 % ont pris l'abonnement A_1.
   Traduire cette donnée en terme de probabilité.
   b. En déduire la probabilité d'avoir acquis le modèle standard et d'avoir opté pour l'abonnement A_1.
   c. Justifier que la probabilité d'avoir choisi le modèle miniature et l'abonnement A_1 est égale à $0,288$.
3. Le coût d'un téléphone standard est de 1 000 F et celui d'un miniature est de 3 000 F.
   L'abonnement A_1 revient à 170 F par mois.
   L'abonnement A_2 revient à 400 F par mois.
   On appelle X la variable aléatoire correspondant au coût total sur 1 an occasionné par l'achat d'un téléphone et l'abonnement choisi, pour un client pris au hasard dans l'échantillon.
   a. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X, en expliquant votre raisonnement.

x_i	3 040		5 800	
$p(X = x_i)$	0,192	0,288		

   b. Calculer l'espérance mathématique de X et l'interpréter.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Les fabricants d'ordinateurs portables vendent leurs machines à un prix P_n l'année n. Les quantités offertes O_n sont fonction du prix P_{n-1} (à l'année $n-1$), ceci du fait des délais de fabrication. Les quantités demandées D_n sur le marché sont, elles, fonction du prix P_n au cours de l'année n. Les fabricants recherchent l'équilibre du marché, c'est-à-dire qu'à chaque année n on ait $O_n = D_n$ pour qu'il n'y ait pas de stock.

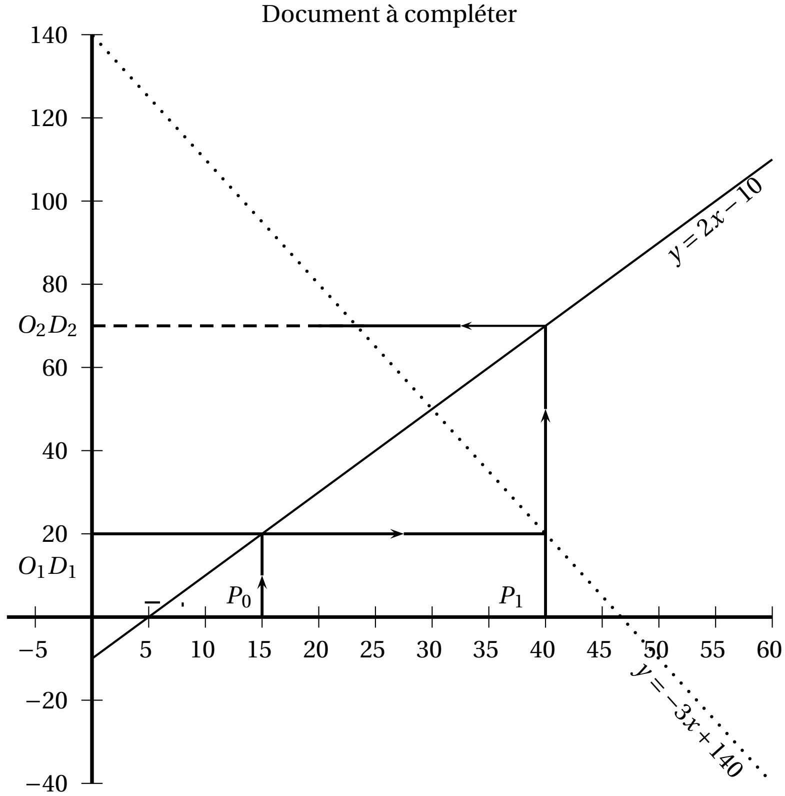
$$\text{On a } \left\{\begin{array}{lcll} O_n & = & 2P_{n-1} - 10 & \text{avec} \quad n \geqslant 1 \\ D_n & = & -3P_n + 140 & \text{avec} \quad n \geqslant 0. \end{array}\right.$$

P_n est exprimé en milliers de francs, O_n et D_n en centaines d'unités.

1. **a.** Sur le document joint (à rendre avec la copie), on a représenté les droites d'équations :
   $y = 2x - 10$ et $y = 3x + 140$.
   Déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.
   b. On a $P_0 = 15$, déterminer la valeur de O_1 ; O_1 est représenté sur le graphique.
   Les quantités offertes doivent chaque année être égales aux quantités demandées, donc en particulier $O_1 = D_1$. En utilisant D_1 , on a représenté P_1 sur le graphique.
   Ce prix P_1 , détermine une offre O_2 qui doit être égale à D_2. Cette valeur déclenche alors un prix P_2 ; le représenter sur le graphique ainsi que P_3 et P_4. Peut-on émettre une conjecture quant à la limite de la suite (P_n) ?
2. **a.** Dans l'hypothèse d'équilibre, soit $0_n = D_n$, démontrer que :
   $$P_n = -\frac{2}{3}P_{n-1} + 50 \text{ avec } n \geqslant 1$$
   b. (u_n) est la suite définie pour $n > 0$ par $u_n = P_n - 30$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   c. Exprimer u_n en fonction de n et montrer que :
   $$P_n = 30 - 15\left(-\frac{2}{3}\right)^n \text{ pour } n?0$$

d. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |P_n - 30| = 0$. Déterminer alors la limite P de la suite (P_n) . Pour ce prix d'équilibre P, quelles sont alors les quantités offertes et demandées ?

Document à compléter



Problème **10 points**

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'un pays de 1950 à 1985.
t_i désigne le rang de l'année et p_i la population en millions d'habitants.

Année	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985
Rang de l'année t_i	0	5	10	15	20	25	30	35
p_i	8	8,9	9,9	11	12	13,5	15	16,6

A. Exploitation des données - Recherche d'un modèle

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(t_i\ ;\ p_i\right)$ associé à la série statistique dans un repère orthogonal.

- Sur l'axe des abscisses, choisir 2 cm pour 5 unités (5 ans).
- Sur l'axe des ordonnées, placer 8 à l'origine, puis choisir 2 cm pour une unité (1 million d'habitants).

2. Les experts cherchent à modéliser cette évolution par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points. On pose : $y_i = \ln p_i$. *Le détail des calculs statistiques n'est pas demandé.*

a. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut du coefficient de corrélation linéaire r de la série $(t_i\ ;\ y_i)$.

b. Déterminer une équation de la droite de régression de y en t. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près.)

c. En déduire l'expression de la population p en fonction du rang t de l'année.

B. Étude du modèle exponentiel

On admet que la fonction f définie sur $[0\,;\,35]$ par :

$$f(t) = 8\mathrm{e}^{0,02t}$$

est une modélisation satisfaisante de l'évolution de la population (en millions d'habitants) de 1950 à 1985.

1. Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;\,35]$ et dresser le tableau de variation complet de f sur cet intervalle.
2. Construire soigneusement la courbe représentative de f, notée $(\mathscr{C})$, dans le repère du **A**. Qu'observe-t-on ?
3. On pose $\mathrm{I} = \int_0^{35} f(t)\,\mathrm{d}t$. Donner une valeur approchée de I arrondie à 10^{-2} près.

   En déduire la population moyenne m du pays durant ces 35 années et la représenter sur le graphique.
4. Calculer le rapport : $\dfrac{f(t+1) - f(t)}{f(t)}$ et en donner une interprétation en terme de pourcentage.
5. Si le modèle exponentiel étudié dans le **B** restait valable après 1985, en quelle année la population aurait-elle dépassé les 19 millions d'habitants ?