Baccalauréat ES Métropole 14 juin 2007

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

QCM

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
NOTATION : une réponse exacte rapporte 1 *point, une réponse fausse enlève* 0,25 *point, l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

1. Pour tout nombre réel a et pour tout nombre réel b, on peut affirmer que $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$ est égal à :

Réponse **A** : $\mathrm{e}^{\left(\frac{a}{b}\right)}$ Réponse **B** : $\mathrm{e}^{(a-b)}$ Réponse **C** : $\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b$

2. On considère trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout nombre réel x, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
Si l'on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors on peut en déduire que :

Réponse **A** : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ Réponse **B** : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ Réponse **C** : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

3. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f'. On donne ci-dessous son tableau de variations.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	e	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

a. L'équation $f(x) = 1$ admet dans $\mathbb{R}$:
Réponse **A** :trois solutions Réponse **B** : deux solutions Réponse **C** : une solution

b. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 peut avoir pour équation :
Réponse **A** : $y = -3x + 2$ Réponse **B** : $y = 3x + 2$ Réponse **C** : $y = -4$

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Dans un pays européen, le montant des recettes touristiques, exprimé en millions d'euros, est donné dans le tableau ci-dessous :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Montant des recettes touristiques y_i en millions d'euros	24 495	26 500	29 401	33 299	33 675	34 190

1. On utilise un ajustement affine. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.

Les coefficients, obtenus à l'aide de la calculatrice, seront arrondis au centième.

2. En supposant que cet ajustement est valable jusqu'en 2007, calculer le montant que l'on peut prévoir pour les recettes touristiques de l'année 2007, arrondi au million d'euros.

Partie B

On considère la fonction f définie pour tout nombre entier n par

$$f(n) = \mathrm{e}^{10,13+0,07n}.$$

On utilise cette fonction pour modéliser l'évolution des recettes touristiques de ce pays européen. Ainsi $f(n)$ représente le montant des recettes touristiques (exprimé en millions d'euros) de ce pays européen pour l'année $2000 + n$.

1. Selon ce modèle, calculer le montant des recettes touristiques que l'on peut prévoir pour l'année 2007. Arrondir le résultat au million d'euros.

2. **a.** Déterminer le nombre entier n à partir duquel $f(n) > 45\,000$.

b. En déduire l'année à partir de laquelle, selon ce modèle, le montant des recettes touristiques dépasserait 45 000 millions d'euros.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

La production journalière d'une entreprise dépend de deux facteurs : le travail de la main d'œuvre et l'utilisation des machines. On désigne :

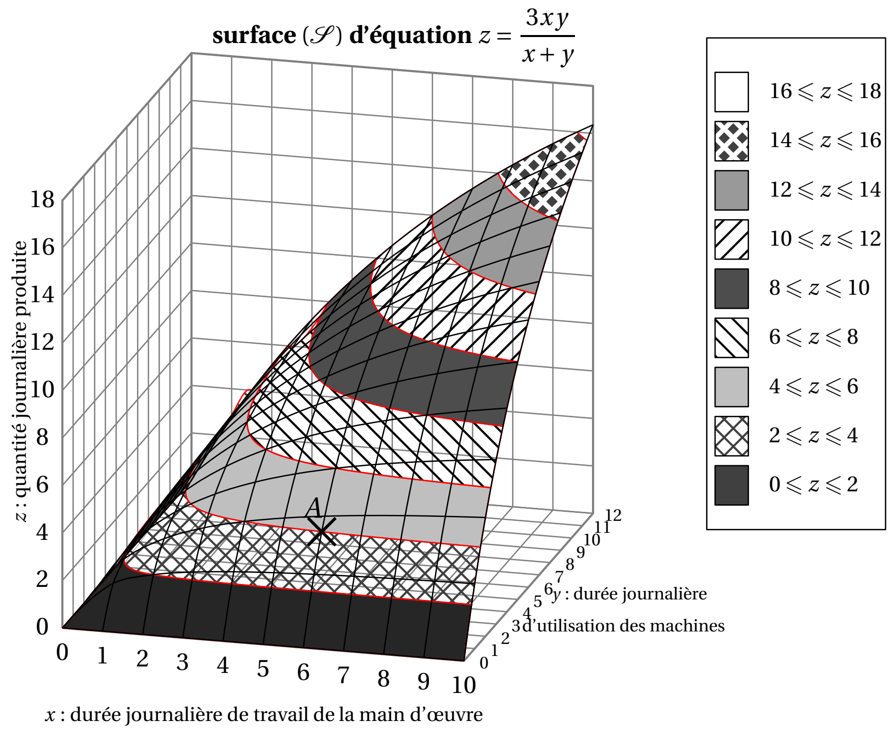
— par x la durée journalière de travail de la main d'œuvre, exprimée en heure ; x appartient à l'intervalle $]0~;~10]$

— par y la durée journalière d'utilisation des machines, exprimée en heures ; y appartient à l'intervalle $]0~;~12]$.

La quantité journalière produite (en tonnes) est donnée par la relation :

$$f\left(x~;~y\right) = \frac{3xy}{x+y} \text{ avec } 0 < x \leqslant 10 \text{ et } 0 < y \leqslant 12.$$

La figure ci-dessous représente la surface $(\mathcal{S})$ d'équation : $z = f\left(x~;~y\right)$ pour $0 < x \leqslant 10$ et $0 < y \leqslant 12$.



Partie 1 : Le point A représenté par une croix est un point de la surface ($\mathscr{S}$).

1. Déterminer graphiquement l'abscisse et la cote du point A. Calculer son ordonnée (arrondie au dixième).
2. Interpréter les résultats obtenus en référence à la production journalière de l'entreprise.

Partie 2 : Pour chaque heure, le coût total du travail s'élève à 4 milliers d'euros, et le coût d'utilisation des machines s'élève à 1 millier d'euros.
L'entreprise décide de dépenser 36 milliers d'euros par jour et cherche à maximiser sa production journalière sous cette contrainte. On a alors $4x + y = 36$.
La quantité journalière produite (en tonnes) sous cette contrainte de coût peut donc être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~10]$ par $g(x) = \dfrac{4x^2 - 36x}{x - 12}$.

1. On note g' la fonction dérivée de g sur l'intervalle $]0~;~10]$.
   a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0~;~10]$, calculer $g'(x)$ et montrer que
   $g'(x) = \dfrac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}$.
   b. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~10]$.
2. **a.** En déduire la durée journalière de travail et la durée journalière d'utilisation des machines permettant d'obtenir une production journalière maximale pour un coût total de 36 milliers d'euros.
   b. Préciser la quantité journalière maximale produite en tonnes.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Amateur de sudoku (jeu consistant à compléter une grille de nombres), Pierre s'entraîne sur un site internet.
40 % des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30 % sont de niveau moyen et 30 % de niveau difficile.

Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95 % des cas, les grilles de sudoku de niveau moyen dans 60 % des cas et les grilles de sudoku de niveau difficile dans 40 % des cas.
Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire.
On considère les évènements suivants :

F : « la grille est de niveau facile »
M : « la grille est de niveau moyen »
D : « la grille est de niveau difficile »
R : « Pierre réussit la grille » et $\overline{R}$ son évènement contraire.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. **a.** Calculer la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.
   b. Calculer la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas.
   c. Montrer que la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à $0,68$.
3. Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?
4. Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme : « Je pense que ta grille était facile ».
   Dans quelle mesure a-t-elle raison ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Un laboratoire pharmaceutique produit et commercialise un médicament en poudre. Sa production hebdomadaire, exprimée en kilogrammes, est limitée à 10 kilogrammes.

Partie I : étude des coûts hebdomadaires de production

1. Le coût marginal de production est fonction de la quantité x de médicament produit. Une étude a montré que, pour cette entreprise, l'évolution du coût marginal de production est modélisée par la fonction C_m définie pour les nombres réels x de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$C_m(x) = x + \frac{16}{x+1}.$$

   ($C_m(x)$ est exprimé en centaines d'euros, x en kilogrammes). Étudier les variations de la fonction C_m, puis dresser le tableau de variations de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
2. En économie, le coût marginal de production correspond à la dérivée du coût total de production. Ainsi le coût total de production hebdomadaire est modélisé par une primitive de la fonction C_m.
   Déterminer la fonction C, primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ qui modélise ce coût total, pour une production de médicaments comprise entre 0 et 10 kilogrammes, sachant que $C(0) = 0$.

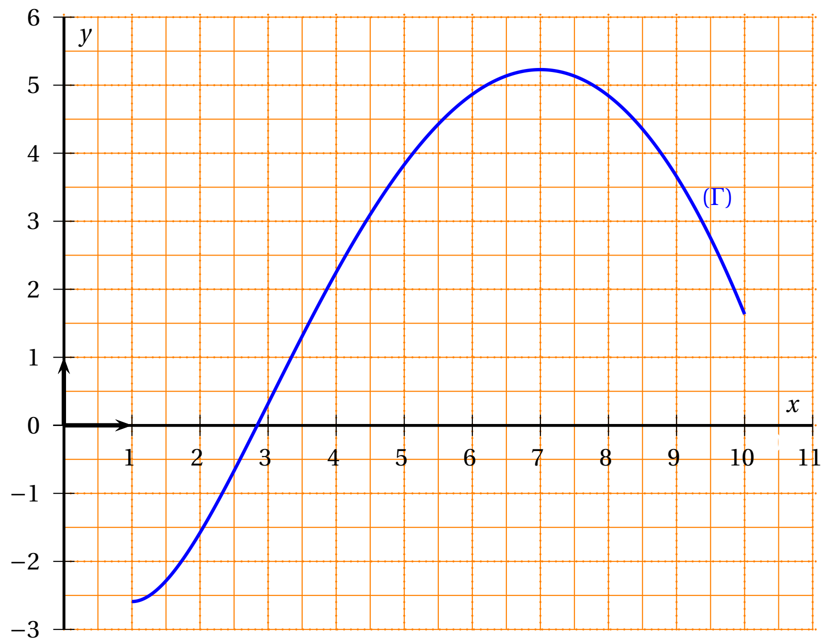
Partie II : étude du bénéfice hebdomadaire.

On admet que le laboratoire produit une quantité hebdomadaire d'au moins 1 kg et que tout ce qui est produit est vendu. Le bénéfice hebdomadaire (exprimé en centaines d'euros) dépend de la masse

x (exprimée en kilogrammes) de médicament produit. Il peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[1 ; 10]$ par :

$$B(x) = 9x - 0,5x^2 - 16\ln(x+1).$$

La représentation graphique de la fonction B dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe (Γ) donnée ci-dessous.



1. a. On admet que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; 7]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[7 ; 10]$.

En déduire la quantité de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour que son bénéfice hebdomadaire (en centaines d'euros) soit maximal.

b. Calculer ce bénéfice hebdomadaire maximal en centaines d'euros (arrondir à l'euro).

2. a. Utiliser la courbe (Γ) pour déterminer un encadrement d'amplitude 0,5 de la plus petite quantité x_0 de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour ne pas perdre d'argent.

b. Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur décimale de x_0 approchée au centième.