Baccalauréat ES Métropole septembre 1997

Exercice 1 **5 points**

Pour l'achat d'un nouveau matériel, un chef d'entreprise a réalisé un emprunt d'un coût total de 285 000 francs sur cinq ans. À la fin de chaque mois, on note y_i le montant en milliers de francs (en abrégé : kF) des bénéfices cumulés réalisés depuis l'achat du nouveau matériel.
Le tableau ci-dessous correspond au relevé des neuf premiers mois de remboursement :

Rang x_i du mois	Montant y_i des bénéfices cumulés en kF
1	35
2	40
3	46
4	54
5	65
6	80
7	90
8	102
9	120

N. B. - *Dans cet exercice, aucun détail des calculs statistiques, à effectuer à la machine, n'est demandé.*

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal avec, pour unités graphiques : 1 cm en abscisses, 1 cm pour 10 kF en ordonnées, en faisant débuter la graduation sur l'axe des ordonnées à 30.
2. Si on effectue un ajustement affine sur la série statistique considérée, on obtient l'équation :

$$y = 10,66x + 16,88$$

   comme équation de la droite de régression D de y en x.
   En admettant que la tendance décrite par D se maintienne, à partir de quel mois l'emprunt sera-t-il amorti par les bénéfices assurés par l'achat du nouveau matériel ?
3. L'expérience prouve que l'hypothèse d'une croissance linéaire des bénéfices est trop optimiste. Dans cette question on va envisager une croissance plus lente.
   a. On pose $t_i = \sqrt{x_i}$.
   Représenter sous forme de tableau la série statistique (t_i, y_i) pour les valeurs non entières de t_i on prendra les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près par défaut.
   Un ajustement affine est-il envisageable pour cette série ?
   b. On procède à cet ajustement, les coefficients étant évalués à 10^{-2} près par défaut. Quelle relation obtient-on entre y et x ?
   c. En admettant la validité de la relation obtenue en b), l'emprunt sera-t-il amorti à son échéance ?

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Un sac contient des jetons indiscernables au toucher et marqués de l'une des trois lettres « a », « b » et « c ». Il y a autant de jetons marqués « a » que de jetons marqués « b » et que de jetons marqués « c ».
On forme des « mots » de trois lettres en tirant successivement trois jetons, le jeton tiré étant remis dans le sac avant d'effectuer le tirage suivant :
« abc », « aaa », « cbc », « bca »sont des exemples de tels « mots ».

1. Calculer le nombre de mots différents qu'il est possible d'obtenir.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A « le mot ne contient pas la lettre "a" » ;
   B « le mot est formé de trois lettres distinctes » ;
   C« le mot contient au moins deux fois la même lettre » ;
   D « la première et la dernière lettre sont identiques ».
   N. B. - *On donnera les résultats sous forme exacte.*
3. Déterminer les probabilités des deux évènements « A ou B »et « A ou D ».

Exercice 2 5 points
Enseignement de spécialité
Un touriste revient de vacances avec 15 films :
2 films de photographies d'Italie ;
8 films de photographies de Grèce ;
5 films de photographies de Turquie.
Aucune marque distinctive ne permet d'identifier les films.
Pour des raisons financières le touriste ne fait développer à son retour que 11 de ces 15 films.
N.B. - *On donnera les résultats sous forme décimale approchée à* 10^{-4} *près.*

1. Combien y a-t-il de choix différents possibles de 11 films parmi les 15 ?
2. Quelle est la probabilité que, parmi les 11 films développés, il y ait :
   a. Tous les films sur la Grèce ?
   b. Aucun film sur l'Italie ?
   c. Autant de films sur la Grèce que sur la Turquie ?
   d. Deux fois plus de films sur la Turquie que sur l'Italie ?
3. Le photographe, d'origine italienne, propose à son client de lui faire cadeau du développement des films sur l'Italie, s'il en trouve parmi les 11 films. On appelle X la variable aléatoire « nombre de films sur l'Italie développés ».
   Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

PROBLÈME **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction numérique de variable réelle définie dans $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 100(2x-5)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A. étude de la fonction f

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ (on pourra écrire $f(x) = 100\left(\dfrac{2x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{5}{\mathrm{e}^x}\right)$).
   Quelle est l'interprétation graphique ?
2. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.
   Dresser le tableau de variation de f.
3. Construire la partie de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant aux points dont l'abscisse est comprise entre 2 et 8.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution et une seule α dans l'intervalle $\left[2\;;\;\dfrac{7}{2}\right]$.
   On admettra que cette même équation admet une solution et une seule β dans l'intervalle $\left[\dfrac{7}{2}\;;\;8\right]$.

   b. Utiliser une calculatrice pour donner de α un encadrement décimal à 10^{-2} près.
   On admettra que $4,70 < \beta < 4,71$.

Partie B. Calcul de primitive

1. Déterminer deux nombres a et b tels que la fonction F définie dans $[0, +\infty[$ par : $F(x) = 100(ax+b)\text{e}^{-x}$ soit une primitive de f sur $[0\;,\;+\infty[$
2. Calculer la valeur exacte de

$$I = \int_3^6 f(x)\,\text{d}x.$$

Partie C. Application

Le nombre $f(x)$ représente le bénéfice en milliers de francs que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x centaines de pièces (pour x compris entre 2 et 8).
Par exemple, si l'entreprise fabrique 300 pièces, elle réalise un bénéfice de
$f(3) \times 1\,000$ F.

1. En utilisant si nécessaire la courbe $\mathcal{C}$ et les résultats de la partie **A**, déterminer :
   a. Les quantités de pièces à produire pour que l'entreprise ne travaille pas à perte.
   b. La quantité de pièces à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal que l'on précisera au franc près.
   c. Les quantités de pièces à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice d'au moins 4 000 F.
2. Lorsque l'entreprise produit entré 300 et 600 pièces, elle réalise un bénéfice moyen qui, exprimé en milliers de francs, est égal à :

$$\frac{1}{3}\int_3^6 f(x)\,\text{d}x.$$

   Utiliser la partie **B** pour déterminer au franc près ce bénéfice moyen.