Baccalauréat ES Métropole septembre 1995

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'épargne des ménages (en milliards de francs) en France, entre 1981 et 1988.

Année	1981	1992	1983	1984	1985	1986	1987	1988
x_i : rang de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i : épargne des ménages	417	458	459	447	465	463	417	475

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique, dans un plan rapporté à un repère orthogonal ; on choisira pour unités graphiques :
   - sur l'axe des abscisses, 1 cm pour une année
   - sur l'axe des ordonnées, 2 cm pour 10 milliards de francs.

   N. B. - On ne cherchera pas à faire apparaître l'origine sur la feuille.
2. **a.** Déterminer le taux d'accroissement annuel de l'épargne des ménages pour chacune des années de 1982 à 1988 (on exprimera le résultat en pourcentage avec une décimale) ; par exemple, pour 1984, ce taux est :

   $$\frac{447-459}{459} = -0,026\,\% \quad \text{soit } -2,6\,\%$$

   b. Quelle est, sur la période 1982–1988, la moyenne M des taux calculés en a. ? (On exprimera le résultat en pourcentage.)
3. Pour effectuer une prévision sur le montant ultérieur de l'épargne, on peut utiliser un ajustement logarithmique, de la forme

   $$y = a\ln x + b, \quad \text{où } a \text{ et} b \text{ sont deux nombres réels.}$$

   a. Calculer a et b sachant que la courbe d'ajustement passe par les deux points M(1 ; 417) et M(8 ; 475).

   b. En déduire, selon ce procédé, le montant prévisionnel E (arrondi à l'unité prés) de l'épargne des ménages pour 1995.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans un immeuble de vacances, il y a 50 studios et 60 appartements de type F1 en location. L'agence chargée de la location fournit les renseignements suivants :

	Type d'appartement			
	Studio		F1	
	Adultes	Enfants	Adultes	Enfants
Nombre de lits	2	2	2	3

Chaque vacancier, adulte ou enfant, a une fiche à l'agence de location.
On suppose que chaque lit est occupé par une seule personne.
Chaque logement est loué par deux adultes avec enfants, et tous les lits sont occupés.
On tire, au hasard, la fiche d'un vacancier de l'immeuble.

1. Quelles sont les probabilités des évènements suivants :
   — S : « Le vacancier habite un studio » ;

— F : « Le vacancier habite un F1 » ;
— A : « Le vacancier est un adulte » ;
— E : « Le vacancier est un enfant » ;

2. Quelle est la probabilité de tirer la fiche d'un enfant habitant un F1 ?
3. On tire la fiche d'un enfant. Quelle est la probabilité pour qu'il habite un studio ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Le président d'une association sportive constate que, chaque année, l'association garde 75 % de ses anciens adhérents et qu'il y a 800 nouveaux adhérents.
On suppose que l'évolution du nombre des adhérents reste la même au fil des ans. On se propose d'étudier cette évolution.
On note u_n le nombre d'adhérents au bout de n années.
On sait qu'au démarrage de l'association, il y avait 1 600 adhérents, soit $u_0 = 1600$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que, pour tout n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 800$.
3. On pose $v_n = 3200 - u_n$.
   a. Calculer v_0.
   b. Vérifier que $v_{n+1} = 0,75v_n$. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   c. En déduire que $u_n = 3200 - 1600 \times (0,75)^n$.
   Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire concernant le nombre d'adhérents de l'association ?

PROBLÈME **10 points**

On considère les fonctions u et v définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$u(x) = \mathrm{e}^{0,5x} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2.$$

Sur la figure placée à la fin de l'énoncé, on a donné les courbes représentatives $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ de ces deux fonctions, dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).
Les courbes $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ se coupent aux points d'abscisses 0 et α.
La but du problème est de comparer u et v, à travers leur différence puis leur quotient.

Partie A

En utilisant le graphique, on va étudier la différence entre u et v. Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, on pose $b(x) = v(x) - u(x)$.

1. a. Vérifier que $b'(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + 2 - \mathrm{e}^{0,5x}\right)$.
   b. La droite D d'équation $y = x + 2$ a été tracée sur le graphique. On appelle β l'abscisse du point d'intersection de D et $\mathscr{C}_u$.
   Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de x, le signe de $b'(x)$. En déduire les variations de b sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Soient M et N les points d'abscisse x, situés respectivement sur les courbes $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$. On a ainsi $b(x) = y_N - y_M$ où y_M désigne l'ordonnée du point M et y_N l'ordonnée du point N.
   Utiliser cette propriété pour construire, sur la figure donnée et sans faire aucun calcul, la courbe représentative Γ de b. On construira, en particulier, les points d'abscisses $1, 2, \alpha, \beta$ et on indiquera la tangente de Γ en 0.

Partie B

On va maintenant étudier les variations du quotient q des deux fonctions u et v.
Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, soit $q(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ et soit $f(x) = \ln[q(x)]$.

1. Expliquer pourquoi les fonctions q et f ont les mêmes variations.

2. **a.** Montrer que $f(x) = 2\ln(x+2) - 2\ln 2 - \dfrac{x}{2}$.

Calculer la dérivée de f, étudier son signe, et en déduire les variations de q.

b. Vérifier que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$,

$$q(x) = \frac{(0,5x)^2}{\mathrm{e}^{0,5x}} \times \frac{(x+2)^2}{x^2}.$$

En déduire la limite de q en $+\infty$.

c. Dresser le tableau de variations de q.