∽ Baccalauréat ES Métropole septembre 1998 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

On s'intéresse à l'évolution de la population mondiale entre les années 1950 et 1990. Le document ci-après donne une représentation graphique des données pour les années 1950, 1960, 1970, 1980 et 1990 en papier semi-logarithmique.
L'allure du graphique incite à chercher un modèle sous la forme d'une fonction f définie par :

$$f(t) = Ae^{at}$$

où t désigne le rang de l'année, avec comme origine des temps l'année 1950, et $f(t)$ la population en milliards d'habitants.

1. Déterminer les coefficients A et a en utilisant les données de 1950 et de 1990, à savoir :

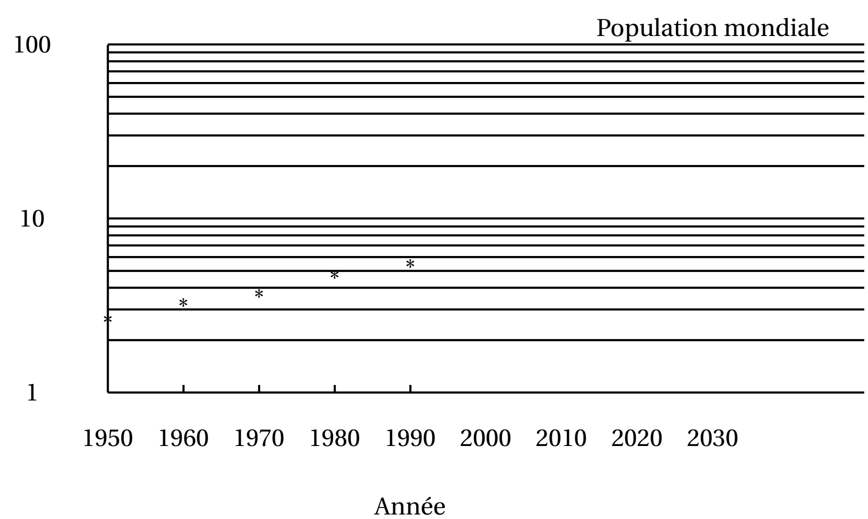
Rang t	0	40
Population en milliards d'habitants	2,5	5,2

On donnera les valeurs exactes de A et a puis des valeurs approchées à 10^{-4} près.
Dans la suite on considérera que : $f(t) = 2,5e^{0,018t}$.

2. Représenter graphiquement f dans le même repère semi-logarithmique que le nuage (document page suivante). Justifier le tracé.

3. à l'aide du modèle proposé, calculer une estimation de l'année au cours de laquelle la population mondiale devrait dépasser 10 milliards d'habitants. Indiquer sur le graphique comment contrôler ce résultat.

4. Calculer $\dfrac{f(t+1)-f(t)}{f(t)}$.
Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée.
Interpréter ce résultat en terme de taux de croissance annuel.



EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Dans cet exercice on pourra utiliser les notations usuelles $p(E)$ pour désigner la probabilité d'un évènement E, $p(F/E)$ ou $p_E(F)$ pour désigner la probabilité conditionnelle de F, sachant l'évènement E réalisé.
Un concours de recrutement de techniciens hautement qualifiés est ouvert uniquement aux étudiants de deux écoles ; l'une s'appelle l'école Archimède, l'autre l'école Ptolémée.
On dispose des informations suivantes concernant les taux de réussite à ce concours pour l'année 1997 :

— le taux de réussite pour les candidats issus de l'école Archimède est de : 85 % ;
— le taux de réussite pour les candidats issus de l'autre école est de : 80 % ;
— le taux de réussite pour l'ensemble des candidats est de : 82 %.

On peut interpréter ces données en termes probabilistes ; on suppose pour cela qu'on choisit un candidat au hasard.
On note R l'évènement : « le candidat a réussi ».
On note de même A l'évènement : « le candidat est issu de l'école Archimède ».
On note $\overline{R}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires de R et de A.

1. Interpréter les données numériques de l'énoncé en termes probabilistes.
2. Les évènements R et A sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.
3. L'objet de cette question est de déterminer la proportion de candidats issus de l'école Archimède parmi les candidats.
   On note x la proportion de candidats issus de l'école Archimède parmi les candidats : c'est aussi la probabilité qu'un candidat, choisi au hasard, soit un candidat issu de l'école Archimède.
   a. Exprimer $p(R \cap A)$, $p\left(\overline{A}\right)$ et $p\left(R \cap \overline{A}\right)$ en fonction de x.
   b. En déduire l'expression de $p(R)$ en fonction de x.
   c. Déterminer la valeur de x.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

*Les deux questions **1.** et **2.** peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

1. On envisage un jeu publicitaire sous la forme d'un QCM (questionnaire à choix multiples).
   Il comporte quatre questions et, pour chaque question, trois réponses sont possibles dont une seule exacte.
   Un joueur répond en choisissant au hasard une réponse pour chaque question.

   a. De combien de façons différentes peut-il remplir le questionnaire ?
   b. On nomme X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes obtenues par le joueur. Donner la loi de probabilité de X.

2. Pour accroître la difficulté, on modifie le QCM : il comporte cette fois cinq questions et, pour chaque question, quatre réponses sont possibles dont une seule exacte.
   Un joueur remplit au hasard le QCM.
   La deuxième ligne du tableau ci-dessous indique les probabilités respectives pour que le joueur ait exactement 0, 1, 2, 3, 4, 5 réponses justes.

Nombre de bonnes réponses	0	1	2	3	4	5
Probabilité correspondante	$\frac{243}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{1}{1024}$
Nombre de points obtenus					$16-x$	20

Il est prévu d'attribuer 4 points par réponse juste, on ne sait comment pénaliser une réponse fausse : on note x le nombre entier de points retirés au joueur par réponse fausse.

a. Recopier le tableau ci-dessus et compléter la dernière ligne, en indiquant dans chaque cas le nombre de points obtenus en fonction de x. On définit ainsi une variable aléatoire N égale au nombre de points obtenus par le joueur.

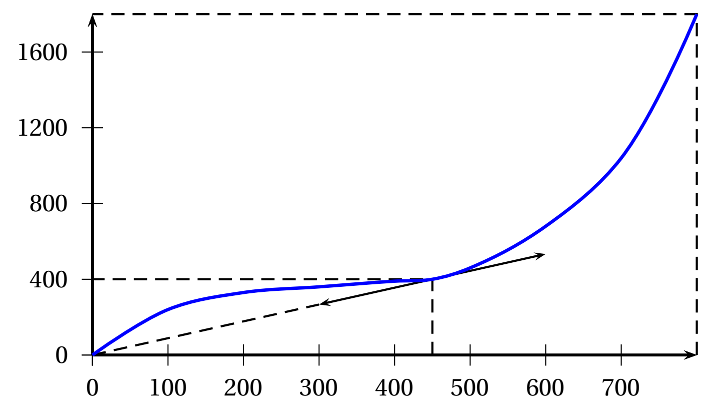
b. Exprimer l'espérance de N en fonction de x.

PROBLÈME **10 points**

Une entreprise spécialisée produit deux types de détergents liquides qu'on nommera A et B pour simplifier.
Les deux parties du problème sont indépendantes.

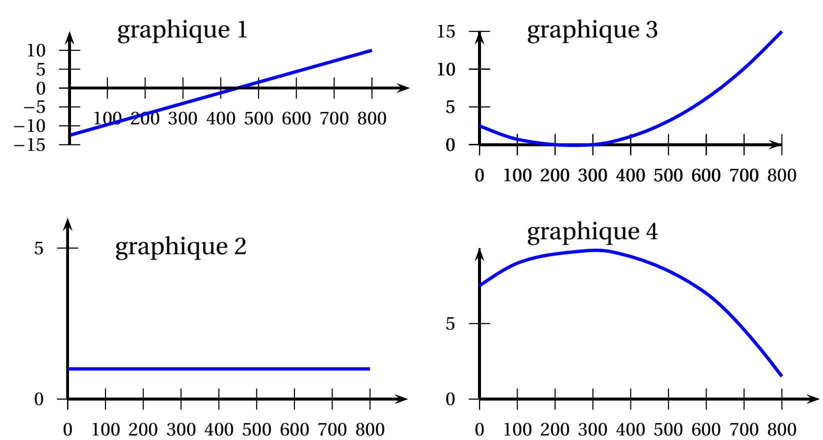
Partie A

La courbe ci-dessous représente le coût total de production du produit A en fonction de la quantité produite. On note x la quantité produite exprimée en litres et $C_{\mathrm{T}}(x)$ le coût total exprimé en francs, x variant de 0 à 800.
On notera que $C_{\mathrm{T}}(0) = 0$, $C_{\mathrm{T}}(450) = 400$, $C_{\mathrm{T}}(800) = 1\,800$ et que la tangente au point d'abscisse 450 passe par l'origine O du repère.



Répondre aux questions suivantes en utilisant les informations portées sur ce graphique.

1. Les économistes définissent le coût marginal comme le supplément de coût de production engendré par la production d'une unité supplémentaire. On considère qu'il peut être modélisé par la dérivée du coût total. Nous le noterons C_m. On a donc $C_m = C'_{\mathrm{T}}$. Parmi les quatre graphiques (1, 2, 3 et 4) de la feuille jointe, un correspond au coût marginal associé à la production du détergent A. Lequel ? Justifier la réponse.



2. Déterminer $\displaystyle\int_0^{450} \mathrm{C}_m(x)\,dx$.

Partie B

Pour le détergent B l'entreprise est en situation de monopole. Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par :

$$f(x) = 0,5x + \frac{8}{x} \text{ où } x > 0.$$

Le coût moyen $f(x)$ est exprimé en milliers de francs et la quantité produite x en hectolitres. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan (unité graphique : 1 cm).

1. Étude de la fonction coût moyen

a. étudier le sens de variation de cette fonction sur l' intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Déterminer les limites de $f(x)$ en 0 et $+\infty$.

c. Montrer que la droite D d'équation $y = 0,5x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

d. Construire $\mathscr{C}$ ainsi que D, donner un tableau de valeurs.

2. Seuils de rentabilité pour l'entreprise

L'entreprise ne peut être bénéficiaire que si le prix de vente de l'hectolitre est supérieur au coût moyen de fabrication.

Le prix de vente de l'hectolitre $p(x)$ est fonction de la quantité x vendue.

$$p(x) = -0,8x + 13$$

où $p(x)$ est exprimé en milliers de francs et x en hectolitres.

a. On note $\mathscr{P}$ la représentation graphique de la fonction p. Tracer $\mathscr{P}$ dans les mêmes axes que la représentation de f, puis déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

b. Retrouver le résultat précédent par le calcul. (On pourra se ramener à une inéquation du second degré).