Baccalauréat ES France septembre 2002

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les résultats des calculs numériques seront arrondis avec deux décimales.

Une entreprise recherche trois personnes expérimentées pour occuper trois postes techniques importants. On a constaté, lors d'embauches précédentes, que parmi les candidats qui peuvent se présenter, 80 % ont les compétences requises pour occuper ces postes. Pour sélectionner les candidats, les recruteurs de l'entreprise élaborent un test. On estime que :

- si une personne est compétente, elle a 85 chances sur 100 de réussir le test;
- si une personne est incompétente, elle a 20 chances sur 100 de réussir le test.

1. Une personne se présente pour le premier poste. On note

- C l'évènement « la personne est compétente »
- R l'évènement « la personne réussit le test ».
- $\overline{C}$ et $\overline{R}$ désignent les évènements contraires respectifs de C et R.
- Si A et B sont des évènements,

* $p(A)$ est la probabilité de réalisation de A

* $p_B(A)$ est la probabilité de réalisation de A sachant que B est réalisé, notée aussi $p(A/B)$.

a. À l'aide des informations indiquées dans l'énoncé :

Donner les valeurs de $p(C)$ et $p_C(R)$. Donner la probabilité qu'une personne réussisse le test, sachant qu'elle n'est pas compétente.

b. Calculer $p\left(\overline{C}\right)$.

c. Calculer la probabilité qu'une personne réussisse le test et soit compétente.

d. Montrer que $p(R) = 0,72$.

e. Une personne réussit le test. Quelle est la probabilité qu'elle soit compétente ?

2. Trois candidats se présentent pour pourvoir les trois postes.

Ils subi successivement le test de façon indépendante.

On admet que la probabilité de réussite au test est de $0,72$ pour chacun.

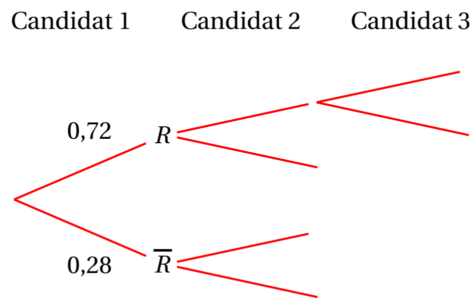
X désigne la variable aléatoire donnant le nombre de candidats, parmi les trois, réussissant le test.

a. On a esquissé ci-dessous un arbre pondéré traduisant la situation.

Recopier cette esquisse sur la copie et la compléter par les branches et les légendes manquantes.

b. Calculer $p(X = 3)$.

c. Calculer la probabilité qu'exactement deux candidats sur les trois réussissent le test.



Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

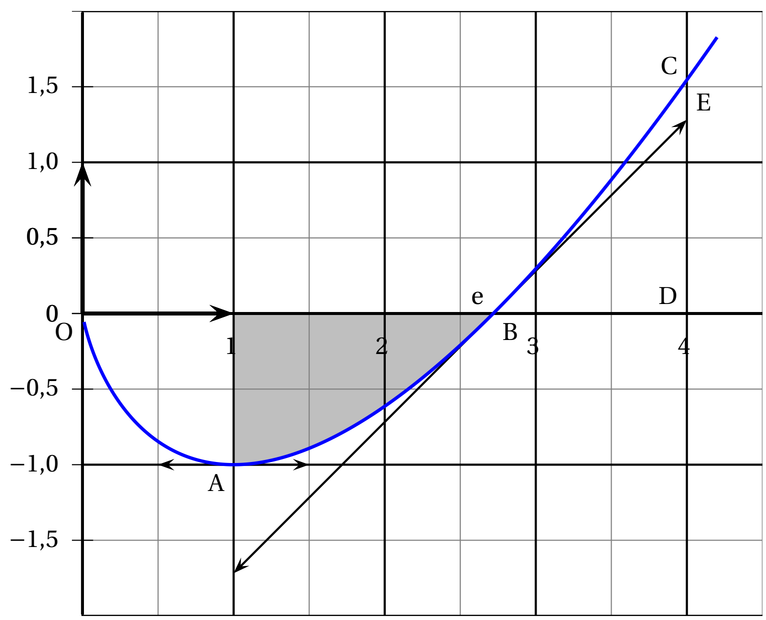
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé :

- la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,-\infty[$;
- deux tangentes à cette courbe : celle au point A d'abscisse 1 et celle au point B d'abscisse e.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A$(1\,;\,-1)$, B$(\text{e}\,;\,0)$ et C$(4\,;\,f(4))$.

La tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses.

La tangente en B passe par le point E tel que BD = DE, où D est le point de coordonnées $(4\,;\,0)$ et E a pour abscisse 4.



Le nombre e est la base des logarithmes népériens.

1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
   a. Sans justifier, donner $f'(1)$ et $f'(\text{e})$.
   b. Sans justifier, donner les solutions dans $]0\,;\,4[$ de l'inéquation $f(x) < 0$, puis celles de : $f'(x) < 0$.
   c. Soit $\mathscr{A}$, en unités d'aire, une estimation de l'aire de la région colorée, région comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.
   Parmi les trois nombres suivants : 2,9 ; 1,1 ; 0,6 lequel est la meilleure valeur approchée de $\mathscr{A}$? Justifier la réponse.
2. On suppose que la fonction f précédente est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x.$$

a. Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f et les valeurs de $f'(1)$ et de $f'(\text{e})$; on ne déterminera pas la limite en $+\infty$.

b. Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;\,4]$ par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)$$

est une primitive de f sur $]0\,;\,4]$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Dans un repère orthonormal de l'espace $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ on considère les points A$(1\,;\,0\,;\,2)$ B$(2\,;\,1\,;\,0)$ et C$(0\,;\,1\,;\,2)$

a. Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{u}\,(1\,;\,1\,;\,1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. En déduire une équation cartésienne de ce plan.

d. Quelles sont les coordonnées des points E, F et G intersections du plan (ABC) avec les droites $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath}\right)$, $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$?

Représenter les points A, B, C et le triangle EFG dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

e. Soit D le point défini par $\overrightarrow{\text{AD}} = 3\overrightarrow{u}$.
Déterminer ses coordonnées, puis le placer sur le graphique.

f. Pourquoi les triangles ABD et ACD sont-ils rectangles en A ?
Démontrer que BCD n'est pas rectangle.

2. Les points A, B, C et D déterminent un solide S à quatre faces triangulaires (tétraèdre) dont trois sont des triangles rectangles.
On considère un jeu où on lance le solide S . Il retombe sur une de ses faces.
On a perdu si cette face est un triangle rectangle et on a gagné dans le cas contraire.
Une étude statistique a montré que l'on avait deux fois plus de chances de perdre que de gagner.

a. On lance le solide S une fois.
Quelle est alors la probabilité que S retombe sur la face (BCD) ?

b. On lance le solide S quatre fois, les lancers étant indépendants.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la face (BCD) ?
(On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.)

PROBLÈME **9 points**
Commun à tous les candidats

La partie C est indépendante des parties A et B.

Partie A
Soit h la fonction polynôme du second degré définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$h(x) = (\text{e}-1)x^2 - 2(\text{e}-1)x + 1,$$

la constante e désignant la base des logarithmes népériens ($\text{e} \approx 2,718$).

1. Montrer que h est strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$.

2. Justifier le fait que h s'annule une fois et une seule entre 0 et 1. On note α le nombre réel qui vérifie $h(\alpha) = 0$.
3. En utilisant les résultats des questions précédentes, préciser le signe de $h(x)$ sur $[0;1]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0;\,1]$ par

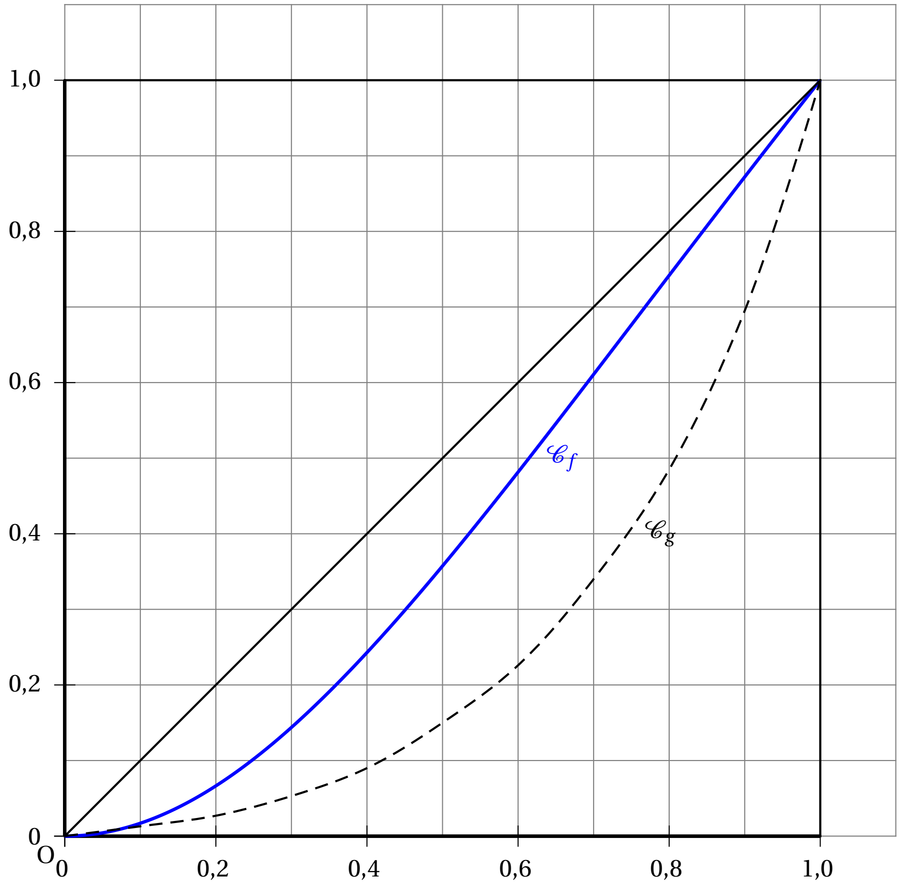
$$f(x) = \ln\left[(\mathrm{e}-1)x^2+1\right]$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique 10 cm).

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Étudier les variations de f sur $[0;\,1]$.
3. On veut préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$.
   Pour cela, on étudie les variations de la fonction définie sur $[0;\,1]$ par $d(x) = x - f(x)$.
   a. Montrer que $d'(x) = \dfrac{h(x)}{(\mathrm{e}-1)x^2+1}$ où h est la fonction étudiée dans la **partie A**.
   b. Étudier le sens de variation de d sur $[0;\,1]$.
   c. Calculer $d(0)$ et $d(1)$.
   d. Déduire de ce qui précède le signe de $d(x)$ sur $[0;\,1]$.
   Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite D.

Partie C

Sur le graphique ci-dessous sont représentées la droite d'équation $y = x$, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f étudiée dans la **partie B** et la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative d'une nouvelle fonction g.



Les courbes représentant f et g illustrent ici respectivement la répartition des salaires dans deux entreprises A et B.
En abscisses, x représente le pourcentage cumulé (sous forme décimale) des personnes ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de chaque entreprise; par exemple si l'on veut considérer les 60 % les moins bien payés de l'ensemble des salariés d'une entreprise, on choisira $x = 0,6$.
En ordonnées, $f(x)$ (ou $g(x)$) représente le pourcentage (sous forme décimale) de la masse salariale totale affectée aux t % les moins bien payés des salariés de chaque entreprise, avec $\dfrac{t}{100} = x$.
Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont des courbes de Lorenz.

1. Déterminer graphiquement (avec la précision permise par le dessin), pour chaque entreprise, une valeur approchée du pourcentage de la masse salariale affectée aux 60 % des salariés les moins bien payés.

2. Déterminer graphiquement (avec la précision permise par le dessin), pour chaque entreprise, une valeur approchée du pourcentage des salariés les moins bien payés dont la masse des salaires représente 60 % de la masse salariale totale.

3. Dans quelle entreprise la distribution des salaires est-elle la plus irrégulièrement répartie ?