∽ Baccalauréat ES Métropole septembre 1999 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le lycée IXE a décidé d'organiser un voyage en Australie pour assister aux Jeux olympiques de l'an 2000 qui se dérouleront à Sydney. Pour réduire le coût, élèves et adultes cherchent à organiser des activités qui rapportent de l'argent.

Le Club Poésie décide d'éditer et de vendre un recueil de textes écrits par les élèves. Pour cela il commence par réaliser une « étude de marché » auprès de la population du lycée, afin de savoir à quel prix vendre ce recueil pour avoir la plus importante rentrée d'argent.

Les résultats de cette étude figurent dans le tableau ci-dessous.

x_i est le prix de vente en francs d'un recueil.

y_i est le nombre de personnes prêtes à acheter le recueil au prix x_i.

x_i	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	1 200	900	800	550	500	350	300	100

Tous les calculs statistiques seront faits à la calculatrice.

1. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour origine le point de coordonnées $(10\,;\,0)$, 2 cm pour 5 francs en abscisse et 1 cm pour 100 personnes en ordonnée.
2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire (donner une valeur arrondie à 10^{-3}.
   Pourquoi un ajustement linéaire est-il justifié ?
3. Donner une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode de moindres carrés. Le coefficient directeur sera arrondi à 10^{-2} près et l'ordonnée à l'origine à l'unité près.
4. **a.** Calculer alors, en fonction du prix de vente x, la somme que peut encaisser le Club Poésie si la réalité est conforme à la prévision. On nomme $\mathrm{S}(x)$ cette somme.

   b. Étudier les variations de cette fonction S et en déduire le prix x_0 pour lequel cette somme atteint son maximum (x_0 sera arrondi au franc le plus proche).

EXERCICE 2 **5 points**

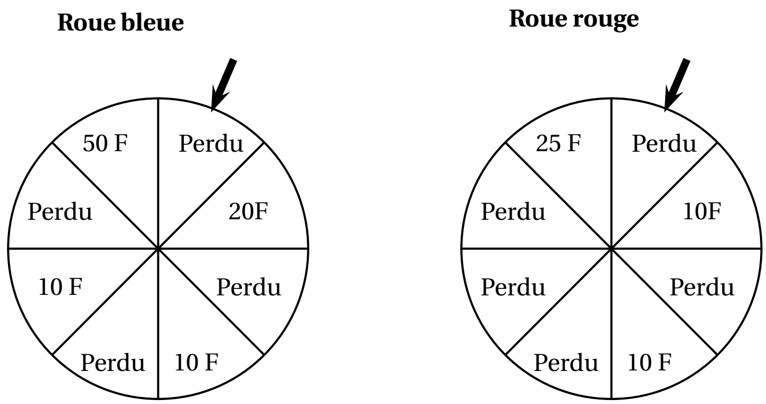
Commun à tous les candidats

Pour recueillir des fonds pour un voyage en Australie en l'an 2000, le lycée organise une fête. Le Club Maths décide de monter un stand de loterie. Le « futur gagnant » tire au hasard une boule dans une ume contenant 15 boules bleues et 10 boules rouges.

S'il tire une boule bleue, il lance la roue bleue,

S'il tire une boule rouge, il lance la roue rouge.

Chaque roue est partagée en 8 secteurs de même dimension. Quand la roue est lancée, elle s'arrête de façon aléatoire et la flèche ne peut indiquer qu'un seul secteur. Tous les secteurs ont donc la même chance de « sortir ».



On note B l'évènement « Tirer une boule bleue », R l'évènement « Tirer une boule rouge » et G l'évènement « Gagner ».
On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement B, puis celle de l'évènement R.
   b. On a tiré une boule bleue : quelle est la probabilité de gagner ?
   c. En déduire la probabilité de l'évènement $G \cap B$.
2. Calculer alors la probabilité de gagner à ce stand.
3. Vérifier que la probabilité de gagner 50 F est $\frac{3}{40}$.
   Soit X la variable aléatoire égale au gain (éventuellement nul) du joueur.
   Recopier le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X et calculer les résultats manquants.

gain x_i	0	10	20	25	50
$p(X = x_i)$	$\frac{11}{20}$		$\frac{3}{40}$		$\frac{3}{40}$

4. Calculer l'espérance mathématique de X.
   On peut compter sur 150 participants à ce stand pendant la fête, et on voudrait faire un bénéfice d'au moins 1 000 francs.
   Quelle participation minimale, arrondie au franc supérieur, de chaque joueur faut-il alors envisager ?

EXERCICE 2 **5 points**
(spécialité)

Le club de football du lycée décide d'organiser un match entre élèves et professeurs pour récolter des fonds pour partir en Australie en l'an 2000. Les joueurs s'entraînent, d'autant plus qu'une rencontre amicale sera organisée à Sydney contre une équipe de lycéens australiens. Pour s'entraîner aux tirs au buts, l'entraîneur dispose 5 ballons face aux buts, et chaque joueur tire ces 5 ballons.
Une étude statistique a montré que sur une série de 5 ballons, un joueur pris au hasard marque :
— 5 buts avec une probabilité de 0,2 ;
— 4 buts avec une probabilité de 0,5 ;
— 3 buts avec une probabilité de 0,3.
Chaque joueur, à chaque entraînement, tire 2 séries de 5 ballons. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs aux buts réussis par un un joueur au cours d'un entraînement.

1. **a.** Calculer la probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs aux buts lors d'un entraînement.

   b. Préciser les valeurs possibles de X et établir sa loi de probabilité (on pourra s'aider d'un arbre).

   Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X arrondi avec deux chiffres après la virgule.

2. Un entraîneur considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs aux buts lorsque $X \geqslant 8$.

   Montrer que la probabilité pour un joueur de réussir cette épreuve lors d'un entraînement est égale à $0,61$.

3. Chaque joueur participe à 10 séances d'entrainement. On admet que les épreuves de tirs aux buts sont indépendantes les unes des autres.

   On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de succès d'un joueur à l'épreuve des tirs aux buts au cours de ces 10 entraînements. Les résultats seront donnés par défaut, avec trois chiffres après la virgule.

   Calculer pour un joueur :

   a. la probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances;

   b. la probabilité d'avoir exactement 6 succès;

   c. la probabilité d'avoir au moins 1 succès.

4. Calculer le nombre minimum d'entraînements auxquels doit participer un joueur pour que la probabilité d'avoir au moins un succès soit supérieure à $0,99$.

PROBLÈME **5 points**

Nota : les parties **B** *et* **C** *sont indépendantes.*

À la rentrée scolaire, une étude statistique s'intéresse au prix des classeurs.

$$f(x) = 4\ln\left(\frac{6}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = 4\ln(x-1)$$

représentent respectivement les quantités demandées et offertes, c'est-à-dire :

— pour $f(x)$ les quantités de classeurs exprimées en milliers que les consommateurs sont prêts à acheter en fonction du prix unitaire x du classeur exprimé en francs;

— Pour $g(x)$ les quantités de classeurs exprimées en milliers, que les producteurs sont prêts à vendre en fonction du prix unitaire x du classeur exprimé en francs.

Partie A

1. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \end{array}\right.$.

   L'intervalle I solution du système est l'intervalle d'étude du modèle.

2. Étudier les variations de f et de g sur I. Tracer les représentations graphiques respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et de g, dans un plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; on prendra 2 cm pour 1 franc en abscisse et 2 cm pour 1 000 classeurs en ordonnée.

3. Déterminer les coordonnées (x_0, y_0) du point A intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. La valeur de x_0 est appelée prix d'équilibre.

4. Quel est le revenu total des producteurs pour le prix d'équilibre?

Partie B

1. Montrer que la fonction F définie par :

$$F(x) = 4\left[x\ln\left(\frac{6}{x}\right) + x\right]$$

   est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Les consommateurs se procurent les quantités offertes à un prix supérieur à celui d'équilibre. La somme totale alors perçue en plus par les producteurs est représentée par l'aire de la partie du plan située entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = x_0$ et la droite d'équation $x = 6$, où x_0, est l'abscisse du point d'équilibre ; elle traduit le surplus des consommateurs exprimé en francs.

   Calculer ce surplus.

Partie C

1. Le prix x augmente de 1 %. Calculer, en fonction de x, la variation relative de la demande.
2. Donner la valeur de la variation de la demande en pourcentage, arrondie à 0,1 %, pour un prix initial de 5 francs qui augmente de 1 %.